5- DYNAMICS OF RIGID BODIES

.(दृढ़ पिण्डों का गति विज्ञान)

Que1. Find the moment of inertia of a solid sphere about any diamenter? (1999)

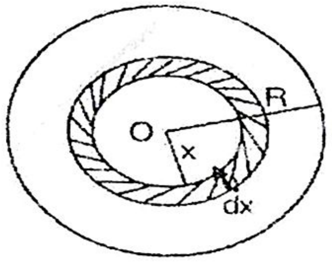
OR Calculate the moment of inertia of a solid sphere about its diameter and about any tangent? (2001,2015)

OR Derive expression for the expirement of inertia of a solid about its tangent. (2008)

Sol^n : Let us consider a solid sphere of mass M and radius R. The volume of the solid sphere is 4/3 πR^3.

माना एक ठोस गोला जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। अतः ठोस गोले का आयतन होगा।

Therefore the mass density



$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad ....(1)$$

(I) MOMENT OF INERTIA ABOUT ITS DIAMETER:-

The solid sphere can be considered as a number of concentric thin shells. Let us consider a shell of thickness dx and radius x.

माना ठोस गोला कई संकेंद्रीय पतले सेलों से बना है। माना एक सेल जिसकी मोटाई dx तथा त्रिज्या x है।

The volume of the shell

$= 4/3\,\pi\,(x+dx)^3 - 4/3\,\pi\,x^3$

$= 4\,\pi\,x^2dx$

and the mass of the shell

$= 4\,\pi\,x^2\,dx$

The moment of inertia of the shell about its diameter is

$dI = (2/3)\ \text{Mass}\ (\text{radius})^2$

or, $dI = (2/3)\,4\,\pi\,x^2dx\ \rho\ .x^2$

or, $dI = (8\,\pi\,/3)\ \rho\ x^4dx$ ------(2)

The moment of inertia of the solid sphere about its diameter can be obtained by integrating this expression between the limit x = 0 to x = R. Thus, we get

अतः ठोस गोले का व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उपर्युक्त समी0 को x = 0 से x = R के बीच समाकलित करने पर प्राप्त होगा। अतः हम पाते हैं --

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R \frac{8\pi}{3}\rho x^4 dx$$

or, $$I = \frac{8\pi}{3}\rho\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^R$$

or, $$I = \frac{8\pi \rho R^5}{15}$$

Using equation (1), we get -

or, $$I = \left[\frac{8\pi R^5}{15} \times \frac{M}{4/3\pi R^3}\right]$$

or, $$\boxed{I = \frac{2}{5} MR^2}$$

(II) ABOUT A TANGENT:-

A tangent to a sphere is parallel to one of its diameter, and at a distance R from it, Therefore on applying the theorem of parallel axis, the moment of inertia (It) of the solid sphere about the tangent is obtained, and is given by

(ii) गोले की स्पर्शी इसके किसी एक व्यास के समानान्तर तथा व्यास से R दूरी पर होगी। अतः समानान्तर अक्ष के सिद्धान्त को प्रयोग करने पर स्पर्शी के सापेक्ष गोले का जड़त्व आघूर्ण I_t होगा

$$I_t = \frac{2}{5} MR^5 + MR^5$$

or, $$\boxed{I_t = \frac{7}{5} MR^5}$$

6 **Ques(2) Explain Moment of inertia and radius of gyration state and explain the theorem of parallel and perpendicular axis. (2002)(2014)**

OR Write short notes on theorem of parallel and perpendicular axis. (GKP-2005,2012,2015) (SU-2016)

OR State the law of (i) parallel and (ii) perpendicular ones for the moment of inertia and prove any one of them.? (2011)

OR Define momentes inertia and radius of gyration of a rigid body of your choice. (2008)

Sol^n : MOMENT OF INERTIA:- The inability of a body to change by it self, its state of rest or uniform motion along a straight line is a property of matter and is called inertia. In exactly the same manner, a body free to rotate about an axis opposes any change in its state of rest or uniform rotation. In other words we can say that it produces inertia for rotational motion i.e it opposes the moment of the couple applied to it, therefore it is called moment of inertia.

जड़त्व आघुर्णः— किसी पिण्ड की अयोग्यता कि वह अपने को बदले अपनी साम्यावस्था को एक समान किसी सीधी रेखा के सापेक्ष अपनी गति को बदले, एक पदार्थ की गुण होती है जिसे जड़त्व कहते हैं। इसी प्रकार कोई पिण्ड किसी अक्ष के सापेक्ष गति कर रही हो अपनी साम्यावस्था या अपनी गत्यात्मक अवस्था में परिवर्तन का विरोध करती है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि घूर्णन के लिए यह जड़त्व उत्पन्न करती है अर्थात् उस जोड़े के गति का विरोध करती है जो इस पर प्रयोग की गई हो। अतः इसे जड़त्व आघूर्ण कहते हैं।

It will be seen that the moment of inertia about a given axis plays the same part in rotational motion (about that axis) as the mass of a body play in translational motion. It means that if r_1, r_2, r_3 —— etc be the perpendicular distance from the axis of the particle of respective mass m_1, m_2, m_3 ———etc, then we get

यह देखने में आयेगा कि किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण घूर्णन में वही भाग अदा

करता है जो कि पिण्ड का द्रव्यमान स्थानांतरीय गति में करता है। इसका तात्पर्य यह है कि यदि इत्यादि कणों के अक्ष के सापेक्ष लम्बवत् दूरियाँ r_1, r_2, r_3 ..... हो जबकि संबंधित द्रव्यमान m_1, m_2, m_3 .... इत्यादि हों, तो

$M.I. = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 +$ ------Thus the moment of inertia of a rigid body about a given axis of rotation is defined as the sum of the products of the masses of its various particles and the square of their respective distances from the axis. Thus we can say

अतः किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण किसी दिये हुए घूर्णन अक्ष के सापेक्ष इस प्रकार परिभाषित किया जाता है सभी कणों के सापेक्ष द्रव्यमानों तथा अक्ष से उनकी दूरियों के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर। अर्थात्

$$I = \sum mr^2 = MK^2$$

Where M is the total mass of the body and K is the effective distance of its particle from the axis.

RADIUS OF GYRATION:-

If M is the total mass of the Body and if the total mass of the body is concentrated at a distance K from the axis of rotation then the M.I. of a system may be dectinet as

$I = MK^2$ Where K is called radius of gyration.

Thus the radius of gyration of a body about an axis of rotation may be defined as the effective distance of its particle from the axis.

अतः किसी अक्ष के परितः किसी पिण्ड का घूर्णन त्रिज्याउस अक्ष के परितः समीकरणों के प्रभावी दूरी के बराबर होता है।

THEOREM OF MOMENT OF INERTIA :-

There are two important theorems on moment of inertia.

(i) Theorem of parallel axis

(ii) Theorem of perpendicular axis

(I) THEOREM OF PARALLEL AXIS:-

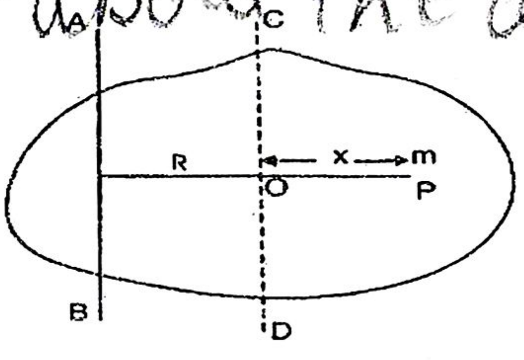
The theorem states that the moment of inertia of a body about any axis is equal to its moment of inertia about a parallel axis passing though its centre of gravity plus the product of its mass and the square of the distance between the two axis.

यह प्रमेय कहता है कि किसी अक्ष के परितः कसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उसके समानान्तर अक्ष से गुजरने वाले गुरूत्व केन्द्र के जड़त्व आघूर्ण तथा पिण्ड के द्रव्यमान तथा अक्ष से इसकी दूरी के वर्ग के योग के बराबर होता है।

Let Ig be the moment of inertia of a body about the axis CD passing though its centre of gravity and let AB be another axis parallel to CD at a distance R as shown in the figure then the moment of inertia I of the body about the axis AB is given by

about the ax

माना किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण अक्ष CD के परितः जब कि अक्ष पिण्ड के गुरूत्व केन्द्र से गुजरे, Ig है। माना AB एक दूसरा अक्ष हैजो कि अक्ष CD के समान्तर है तथा इससे R दूरी पर स्थित है जैसा कि चित्र में है तब इस अक्ष AB के सापेक्ष पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण होगा



$$I = I_g + MR^2$$

Where M is the total mass of the body

(II) THEOREM OF PERPENDICULAR AXIS:- **(2015**

The theorem states that the sum of moment of inertia of a body abou two mutually perpendicular axis is equal to its moment of inertia about a thir axis which is perpendicular to the first two axis, and passes though their point o intersection.

यह प्रमेय कहता है कि दो लम्बवत अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्णों का योग एक तीसरे अक्ष के सापे जड़त्व आघूर्णों के बराबर होता है, जबकि तीसरा अक्ष इन दोनों अक्ष के लम्बवत तथा इनके प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरे।

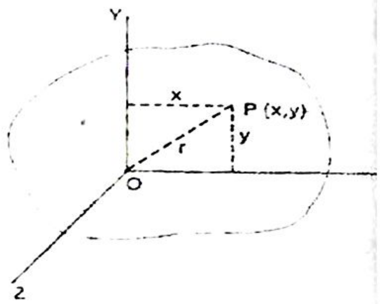
Let I_x and I_y be the moment of inertia of a body about the two mutuall perpendicular axis OX and OY. Suppose OZ be another axis perpendicular to bot the axis OX and OY and passing through their point of intersection O, as shown i the figure, then the moment of inertia I_z about the axis OZ is given by

माना दो लम्बवत अक्ष OX तथा OY के सापेक्ष किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण Ix तथा I है। माना OZ तीसरा अक्ष है जो कि OX तथा OY के लम्बवत है तथा उनके प्रतिच्छेद बिन्दु O गुजरता है जैसा कि चित्रित है तब जड़त्व आघुर्ण अक्ष के परितः होगा

$$I_z = I_x + I_y$$

PROOF:- Let us consider a particle of mass m at P, at a distance r from th point O, and x and y from the axis OY and OX respectviely Then, obviously:

प्रुफ : माना एक कण जिसका द्रव्यमान m है P बिन्दु पर स्थित है तथा यह O बिन्दु से r दूरी पर तथा OX एवं OY अक्ष से x तथा y दूरी पर है। तब स्पस्टया



$$I_x = \sum my^2$$

and $I_y = \sum mx^2$

The distance of point P from the axis OZ is

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Therefore the MI, about the axis OZ is given by

$$I_z = \sum mr^2$$

or $I_z = \sum m\ (x^2 + y^2)$

$$I_z = \sum \left(mx^2 + my^2\right)$$

$$I_z = \sum mx^2 + \sum my^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = I_y + I_x} \quad \text{Proved}$$

Ques(3) You are given two sphere of the same mass size and appearance, but one of them is Hollow and the other is solid throughout. How will you find which one is hollow and which one is solid. **(1999)**

OR

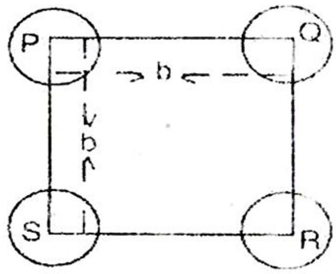
Two sphere of the same mass and same external radius are exactly similar in appearance. One of them is hollow while the other is solid. How can you distinguish between them ?

Hence the acceleration of the solid sphere must begreater then that of the hollow one. There fore the solid sphere will cover a larger distance on the inclined plane than the hollow sphere in the same interval of time, i.e if the two spheres are allowed to roll down an inclined plane simultaneously, the solid sphere will reach down the plane first.

अतः खोखले गोले के लिए k^2 का मान ठोस गोले से ज्यादा होगा। यद्यपि द्रव्यमान तथा वाह्य त्रिज्यायें दोंनों गोलों की समान हैं। अतः ठोस गोले का त्वरण खोखले गोले से ज्यादा होगा। अतएवं एक समान झुके तल में ठोस गोला ज्यादा दूरी तय करेगा खोखले गोले की अपेक्षा। अर्थात् यदि झुके तल में दोंनों गोलों को नीचे लुढ़काया जाय तो सर्वप्रथम तल पर ठोस गोला पहुँचेगा।

Ques(4)Four spheres, each of diameter 2a and mass m are placed with their centers of four corners of a square of side b. Calculate the moment of inertia of the system about any side of the square. (2000)

Sol^n The four spheres of same mass m and radius a are placed at the corners of the square PQRS. M.I. of P and Q spheres about axis PQ



किसी वर्ग PQRS के चारों कोनों पर समान द्रव्यमान m तथा त्रिज्या a के चार गोले स्थित है। P तथा Q गोलों का अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा

$= 2/5\ ma^2 + 2/5\ ma^2$

$= 4/5\ ma^2$ ------------(1)

Similarly, M.I. of R ans S spheres about axis RS $= 4/5\ ma^2$

Since, the axis PQ is parallel to SR are at a distance b, therefore the moment of inertia of S and R spheres about the axis PQ

चूँकि अक्ष PQ अक्ष SR के समानान्तर है तथा दूरी b पर स्थित है अतः S तथा R गोलों का PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा

$= 4/5\ ma^2 + 2mb^2$ ....(ii)

Therefore, total M.I. of the system about the axis PQ is the sum of (i) and (ii), i.e.

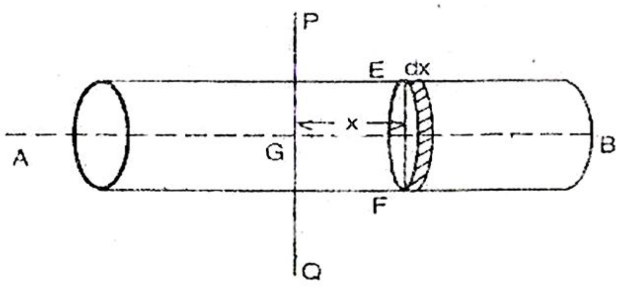
$= 4/5\ ma^2 + 4/5\ ma^2 + 2mb^2$

$= 8/5\ ma^2 + 2mb^2$ **Ans.**

Ques(5)Find the moment of inertia of a solid cylinder of circular cross section about an axis perpendicular to its geometrical axis and passing through its centre of gravity ? (2002)

Sol^n Let us consider a solid cylinder of radius R, mass M and length l. The mass per unit length of the cylinder = M/ℓ

माना एक ठोस बेलन जिसकी त्रिज्या R द्रव्यमान M तथा लम्बाई l है। बेलन का प्रति इकाई द्रव्यमान होगा = M/ℓ



Let PQ be the axis, perpendicular to the geometrical axis AB and passing through the centre of gravity.

Imagine the cylinder to be made up of a number of disc of thickness dx and at a distance x from the centre O of the cylinders.

माना बेलन कई डिस्क से मिलकर बना है जिनकी मोटाई dx है तथा जो बेलन के केन्द्र O से दूरी X पर स्थित है।

Thus, Mass of the disc = (m / l) dx

Therefore the moment of inertia of the disc about its diameter EF is

$$= \frac{1}{4}\frac{m}{\ell}dx.R^2$$

On applying the theorem of parallel axis, the moment of inertia of the disc about an axis PQ is given by

$$dI = \frac{1}{4}\frac{MR^2}{\ell}dx + \left(\frac{M}{\ell}dx\right)x^2$$

$$dI = \frac{R^2}{\ell}\left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)dx$$

The moment of inertia of whole cylinder about an axis PQ is obtained by integrating above exprenion between the limit. x = -l/2 to l/2. Thus

अतः सम्पूर्ण बेलन का PQ अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उपर्युक्त समी० को x = -l/2 to l/2 के बीच समाकलित करने पर प्राप्त होगा। अर्थात्

or, $$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} d\ell = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{M}{\ell}\left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)dx$$

or, $$\ell = \frac{M}{\ell}\left[\frac{x^2}{3} + \frac{R^2}{4}x\right]_{-\ell/2}^{+\ell/2}$$

or, $$I = M\left[\frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right]$$ **Ans.**

6 **Ques(6) Write short notes on compound pendulum?**

OR **(GKP-1999, 2005,2016)**

What is a compound pendulum? Optain an expression for its time period.

(2006, 09, 2011,2015)

Sol^n : A rigid body, which is capable of oscillating freely about a horizontal axis passing through, it is known as a compound pendulum. The point at which the horizontal axis of rotation meets the vertical plane passing through the centre of gravity of the body is known as the point of suspension.

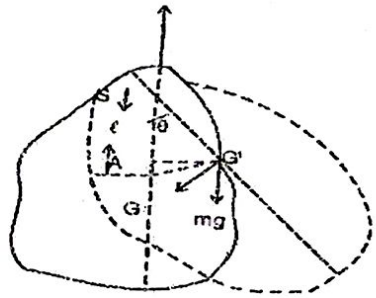
In the normal position of rest, the centre of gravity G of the body lies below S. The weight (mg) of the body is at G and the reaction is along the common line GS. Let G be at a distance l from s.

एक ठोस पिण्ड जो कि किसी क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष स्वतंत्रतापूर्वक दोलन करे संयुक्त दोलक कहलाती है। वह बिन्दु जिस पर घूर्णन का क्षैतिज अक्ष पिण्ड के गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले उर्ध्वाधर तल

से मिलता है उसे निलंबन बिन्दु कहते हैं। साम्यावस्था की सामान्य स्थिति में पिण्ड का गुरूत्व के GS से नीचे स्थित होता है। पिण्ड का भार (mg) गुरूत्व केन्द्र के G तहत तथा प्रतिक्रिया एक ही रेखा GS के तहत होता है। माना GS से दूरी l पर स्थित है।

If the body is rotate through an angle θ about the axis of suspension, the centre of gravity takes the new position G[1]. Now the weight mg is acting downward direction at G and the reaction are at a perpendicular distance $\ell \sin\theta$ and hence they constitute a couple given by

यदि बॉडी को निलंबन अक्ष से θ कोण पर घुमाया जाय तो गुरूत्व केन्द्र की नयी स्थिति G' होगी। अब भार mg गुरूत्व केन्द्र G' के नीचे की दिशा में तथा प्रतिक्रिया लम्बवत दिशा में $l \sin\theta$ दूरी पर होगा, अतः वे एक युग्म बनाऐंगे।



$$C = -mgG'A = -mgl \sin\theta$$

If I be the moment of inertia of the body about the axis of suspension, then the equation of motion is

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

When the angel θ is small, then $\sin\theta = \theta$ and

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta$$

$$or,\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-mgl}{I}\theta = -\mu\theta$$

From this expression it is clear that the angular acceleration of the body is directly proportional to the angular displacement. It shows that the compound pendulum executes a simple harmonic motion with a time period T given by :-

इस समी० से यह स्पष्ट है कि पिण्ड का कोणीय त्वरण कोणीय विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। यह दिखाता है कि संयुक्त दोलक सरल आवर्त गति को प्रदर्शित करता है जबकि उस गति का दोलन काल T होगा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

If Ig be the M.I. of the body about an axis passing through G and parallel to axis of suspension, then from the theorm of parallel axis

यदि पिण्ड का जड़त्व आघुर्ण गुरूत्व केन्द्र से गुजरने वाले तथा निलम्बन अक्ष के समांतर अक्ष के सापेक्ष I हो तो समानान्तर अक्ष के प्रमेयं के अनुसार

$$I = Ig + ml^2$$

Therefore,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ig + ml^2}{mgl}}$$

If k is the radius of gyration of the body about the axis passing though centre of gravity and parallel to the axis of suspension, one get

$Ig = mk^2$ **and hence**

$$I = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + ml^2}{mgl}} \text{ or } T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2/\ell + \ell}{g}}$$

Thus the time period of oscillation of the commpound pendulum is the same as that of a simple pendulum of length $L = (l + k^2/l)$. Therefore the length $L = (l + k^2/l)$ is called the length of an equivalent simple pendulum and is always greater than l.

अतः संयुक्त दोलक के दोलन का आवर्तकाल समान है सरल दोलक के दोलन के आवर्तकाल के जिसके सरल पंडुलम की लम्बाई $L = (l + k^2/l)$ हो। अतएवं लम्बाई $L = (l + k^2/l)$ को सदा सरल दोलक के तुल्य लम्बाई कहते हैं और यह सदा से ज्यादा होगा।

Ques(7)Show that a compound pendulum oscillates with the same period about four points, colinear with centre of gravity. (2000)

OR

Prove that there are four points colinear with the centre of mass of a compound pendulum about which its time of oscillation are equal. show their positon and relation in a figure. (2001)

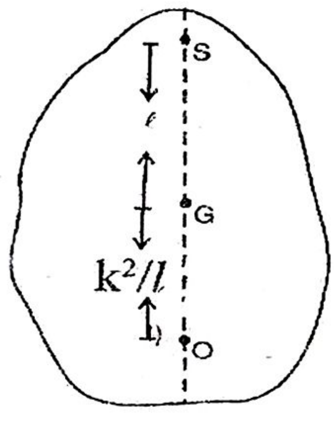
Sol^n: Suppose the body is suspended to oscillate about a horizontal axis passing through O. Then O is the centre of suspension, which is at a distance $l' = k^2/l$ from G. the time period of oscillation is given by

माना कोई पिण्ड इस प्रकार निलंबित हो कि यह एक क्षैतिज अक्ष, जो कि बिन्दु O से गुजरता हो के परितः दोलन कर रही है। तब बिन्दु O को निलंबन का केन्द्र कहते हैं जो कि गुरूत्व केन्द्र G से $l' = k^2/l$ दूरी पर है। दोलनकाल होगा

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l' + k^2/l}{g}}$$

$$or,\quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{k^2/l + \left(k^2/k^2/l\right)}{g}}$$

$$or,\quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{k^2/l + l}{g}}$$



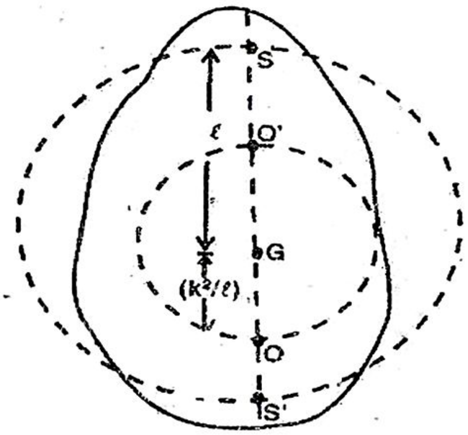
It shows that the time periods of oscillation about O and S are equal Hence, the centre of suspension and oscillation can be interchanged.

यह दिखाता है कि दोलन का आवर्त काल बिन्दु O तथा बिन्दु S के सापेक्ष समान है। अतः निलंबन के केन्द्र तथा दोलन के केन्द्र को आपस में बदला जा सकता है।

The time period of oscillation depends on l, the distance of the point of suspension from the centre of gravity. Further the time period about the points at distance l as well as k^2/l from the centre of gravity are the same. Thus we can have a large number of points lying on the coencentric circles of radii l and k^2/l with the centre at G about which the time periods are the same. Some points on the circles may lies outside the body. we are only concerned with the points lying on the body. Now we draw a line passing through G, then we may have four points co linear with G about which the time periods are same; For example the points S, O, O' S' in the figure are such points.

दोलनकाल l पर निर्भर है जो कि गुरूत्व केन्द्र से निलंबन केन्द्र के बीच की दूरी है। पुनः

गुरूत्व केन्द्र से l दूरी तथा k^2/l दूरी के सापेक्ष दोलन काल का आवर्तकाल समान है। अतः हम उन संकेन्द्रीय वृत्तों जिन की त्रिज्यायें l तथा k^2/l है पर स्थित कई बिन्दुओं तथा गुरूत्व केन्द्र पर समान आवर्तकाल पाते हैं। इन वृत्तों पर कुछ बिन्दु पिण्ड के बाहर स्थित होते हैं। अब हम रेखा जो कि गुरूत्व केन्द्र G से गुजरती है को खींचते हैं तब हम पाते हैं कि चार बिन्दु G बिन्दु के समरेखीय है जिन के आवर्तकाल समान हैं। उदाहरण के लिए बिन्दु S, O', O, S' तथा चित्र में ऐसे चार बिन्दु हैं।



Ques(8)Derive an expression for the Moment of inertia of a rectangular solid cone about its own axis? (2003)

Sol^n : Let the mass of the solid cone be M, its vertical height h and the radius of its base R. Then Volume of the cone = $1/3\ \pi R^2 h$

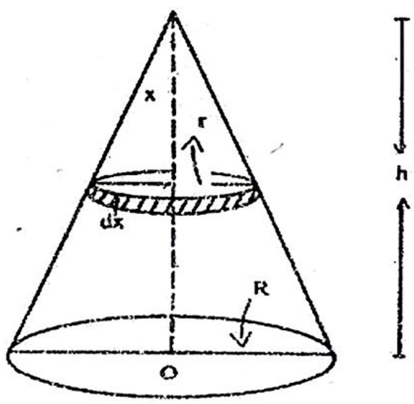
माना ठोस शंकु का द्रव्यमान M इसकी उर्ध्वाधर ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या R है शंकु का आयतन होगा = $1/3\ \pi R^2 h$

Mass of the cone = $1/3\ \pi R^2 hr$.

where ρ is the density of the material of the cone. The cone may be considered to be made up of a number of circular disc of progressively decreasing radii, piled up one above the other, parallel to the base. Considering one such disc at a distance x from its vertex A of thickness dx and radius r, we have the volume of the disc = $\pi r^2.dx$

जहाँ ρ शंकु के पदार्थ का घनत्व है। मना शंकु घटती हुई त्रिज्या के कई वृत्ताकार डिस्क का बना है जो कि आधार के समानांतर हैं। माना ऐसी किसी एक डिस्क जो कि सिरे A से x दूरी पर है तथा जिसकी मोटाई dx और त्रिज्या r_1 है।

$\therefore$ Mass of the disc = $\pi r^2.dx\,\rho$



Therefore, the moment of inertia of the disc about the axis AO passing through its centre and perpendicular to its plane i.e.

अतः डिस्क का जड़त्व आघुर्ण उस अक्ष AO के सापेक्ष जो कि इसके केन्द्र तथा इसके तल के लम्बवत गुजरता है, होगा अर्थात् शंकु के अक्ष के सापेक्ष होगा।

about the axis of the cone = Mass×(radius)^2/2

$$= \frac{\Pi r^2 dx \rho r^2}{} = \frac{\Pi \rho r^4}{2} dx$$

$$= \frac{\Pi \rho . x^4 . \tan^4 \phi}{2} . dx$$

Since r = x tan ϕ , where ϕ is the semi-verticle angle of the cone.

Hence, the M.I. of whole cone about its axis AO is

$$I = \int_0^h \frac{\Pi \rho x^4 \tan^4 \phi}{2} dx$$

$$= \frac{\Pi \rho \tan^4 \phi}{2} \int_0^h x^4 \, dx$$

$$I = \frac{\Pi \rho \tan^4 \phi}{2} . \frac{h^5}{5}$$

$$I = \frac{\Pi \rho}{2} . \frac{R^4}{h^4} . \frac{h^5}{5}$$

$$I = \frac{\Pi \rho . R^4 h}{10}$$

$$I = \frac{1}{3} . \Pi R^2 H \rho \frac{3R^2}{10}$$

$$\boxed{I = \frac{3}{10} MR^2}$$

Ques(9) : Moment of inertia play the same role in rotational motion as mass plays in translational motion explain why ? (2001, 2009)

Sol : Mass is the measure of inertia of a body (translational motion). Greater the mass of a body,greater will be the force required to produce a given linear accleration in it. similarly in rotational motion, to produce an angular acceleration in the body a torque (moment of force) about that axis is applied and this property is described as the "body possesses a moment of inertia about that axis". Greater the moment of inertia, the greater will be the torque required to produce a given angular accleration in it. Thus moment of inertia plays same role in rotational motion as mass plays in translational motion.

द्रव्यमान स्थानांतरीय गति में जड़त्व की गणना करता है। जितना ज्यादा पिण्ड का द्रव्यमान होगा उतना ज्यादा इसमें रेखीय त्वरण पैदा करने के लिएबल की आवश्यकता होगी। इसी प्रकार घूर्णन गति में पिण्ड में कोणीय त्वरण उत्पन्न करने केलिए अक्ष के सापेक्ष एक बल आघूर्ण प्रयोग करना पड़ेगा।

इस गुण को व्याखित किया जाता है कि पिण्ड अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण रख रही है। जितना ज्यादा जड़त्व आघूर्ण उतना ज्यादा बल आघूर्ण आवश्यक होगा कोणीय त्वरण को उत्पन्न करने के लिए। अतः जड़त्व आघूर्ण घूर्णन गति में वही रोल करता है जो कि द्रव्यमान स्थानांतरीय गति में करता है।

Ques(10) Amongst a disc and a hoop, both rolling down an incline plane the disc acquires a larger velocity at the bottom of the plane. Explain why? (2002)

Sol^n : Let M and R be the mass and radius of each body rolling down an inclined plane at an angle ϕ with the horizontal. Since the different bodies have different radius of gyration (K) they will be accelerated by different amounts and hence will require different time intervals in travelling a certain distance on an inclined plane.

माना किसी झुके तल में जो कि क्षितिज से ϕ कोण बनाता है, लुढ़काने वाले प्रत्येक पिण्ड बॉडी का द्रव्यमान M तथा R त्रिज्या है। चूँकि भिन्न–भिन्न पिण्ड की भिन्न–भिन्न रेडियस घूर्णन त्रिज्या होगी अतएवं वे भिन्न–भिन्न त्वरण से त्वरित होगी जिससे वे झुके तल के निश्चित दूरी को तय करने में अलग–अलग समय लेंगी।

(I) FOR DISC :- The moment of inertia of the disc about the axis of rotation is –

$$I = \frac{MR^2}{2} = MK^2$$

$$\Rightarrow \frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$$

Therefore the acceleration

$$a_1 = \frac{g\,Sin\theta}{1+(k^2/R^2)} = \frac{g\,Sin\theta}{1+1/2} = \frac{g\,Sin\theta}{3/2}$$

$$a_1 = \frac{2}{3} g\,Sin\theta$$

(II) FOR HOOP :- The moment of inertia of the hoop or ring about the axis of rotation is

$$I = MR^2 = MK^2$$

or, $$K^2/R^2 = 1$$

Therefore the acceleration

$$a_2 = \frac{g\,Sin\theta}{1+(k^2/R^2)} = \frac{g\,Sin\theta}{1+(1/1)}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} g\,Sin\theta$$

obviously $a_1 > a_2$, hence, if a disc and a hoop are allowed to roll down on inclined plane simultaneously from the same height without slipping then the disc aquire a larger velocity in comparison to hoop at the bottom of the plane.

स्पष्टया $a_1 > a_2$, अतः यदि एक डिस्क तथा एक हुप किसी झुके तल से एक ही समय अलग–अलग समान ऊँचाई से लुढ़काये जाऐं तो डिस्क तल के क्षितिज पर ज्यादा वेग से पहुँचेगा, हुप की तुलना में।

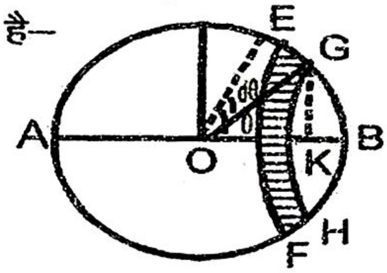
Ques(11). Find an expression for the moment of inertia of a thin spherical shell about its diameter. A thin spherical shell of mass M and raduis R roll, with linear velocity V. Deduce an expression for its kinetic energy.

Sol^n : MOMENT OF INERTIA OF A THIN SHELL :- **(GKP-2014)(SU-2016)**

एक पतले कोश का जड़त्व आघूर्ण :–

Let us consider a spherical shell of mass M and radius R, as shown in the folowing figure. The mass per unit surface area is give by

यदि हम एक गोलाकार कोश ले जिसकी त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो द्रव्यमान प्रति एकांक पृष्ठीय क्षेत्रफल होता है–



$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2} \quad \text{.........................(1)}$$

ABOUT ITS DIAMETER:-

व्यास के परितः :–

Let us divide the shell into a large number of rings having centre along AB. Let us consider a ring lying between the angle θ and $\theta + d\theta$.

माना कोश को कई छल्लों में बराबर विभाजित किया गया है, जिसका केन्द्र AB के अनुदिश है। एक छल्ला को लिया जो कि θ तथा $\theta + d\theta$ के बीच स्थित है।

The radius of the ring = GK = $R\sin\theta$

and the thickness of the ring = EG = $R\,d\theta$

Thus the surface area of the ring

$$= 2\pi(R\sin\theta).Rd\theta$$

$$= 2\pi R^2 \sin\theta.d\theta$$

and the mass of the ring $= 2\pi R^2 \sin\theta.d\theta\sigma$.

Now the moment of inertia of the ring about the axis AB is

δI = mass $\times$ (Radius)^2

$$\delta I = 2\pi R^2 \sin\theta.d\theta\sigma \times (R\sin\theta)^2$$

$$\delta I = 2\pi R^4 \sigma \sin^3\theta.d\theta$$

The moment of inertia of the shell can be obtained by integrating this exression between the limit $\theta = 0$, to $\theta = \pi$, i.e.

कोश के व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण उपर्युक्त समी० को $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ की सीमा के बीच समाकलन करने पर प्राप्त किया जा सकता है।

$$I = \int_0^\pi \delta I = \int_0^\pi 2\pi R^4 \sigma \mathrm{Sin}^3\theta d\theta$$

or, $$I = 2\pi R^4 \sigma \int_0^\pi \mathrm{Sin}^3\theta d\theta$$

or, $$I = 2\pi R^4 \sigma \int_0^\pi \mathrm{Sin}^3\theta\left(1-\mathrm{Cos}^2\theta\right) d\theta$$

Let $x = \mathrm{Cos}\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta.\ d\theta$

when $\cos\theta = 0$, $x = 1$, and wnen $\theta = \pi$, $x = -1$

thus we have

$$I = -2\pi R^4 \sigma \int_1^{-1}\left(1-x^2\right)dx = 2\pi R^4 \sigma \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx$$

or, $$I = 2\pi R^4 \sigma \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

or, $$I = \frac{8\pi}{3} R^4 \sigma$$

Now using eq^n (1), we get

$$I = \frac{8\pi}{3} R^4 . \frac{M}{4\pi R^2}$$

or, $$\boxed{I = \frac{2}{3} M R^2}$$

KINETIC ENERGY OF ROLLING SHELL:-

लुढ़कते हुए कोश की गतिज ऊर्जा :—

When a shell rolls on a plane, it rotates about an axis through its centre of mass and the centre of mass itself move farward along the plane. Therefore, it has kinetic energy of rotation as well as of translation. Its kinetic energy of rotation is

कोई कोश किसी तल पर लुढ़कती है तो यह एक ऐसे अक्ष के परितः घुर्णन करती है जो कि इसके द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाती है और द्रव्यमान केन्द्र स्वयं समतल के अनुदिश गति करता है। अतः कोश के पास घुर्णन के साथ स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा भी होती है। इसकी घुर्णीय गतिज ऊर्ज़ा है

$$\left(E_K\right) = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

Where I_{cm} is the moment of inertia and ω is the angular velocity of the shell about the axis of rotation, and the kinetic energy of translation of ring is

जहाँ I_{cm} कोश की जड़त्व आघूर्ण तथा ω कोश की कोणीय वेग, घूर्णन अक्ष के परितः है। छल्ले की स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा है।

$$\left(E_K\right)_{trans} = \frac{1}{2}MV_{cm}^2$$

Where M is the mass of the ring and V_{cm} is the linear velocity of its centre of mass.

जहाँ M छल्ले का द्रव्यमान तथा V_{cm} छल्ले की द्रव्यमान केन्द्र की रेखीय वेग है।

Therefore the total kinetic energy of the ring is

$$\left(E_K\right)_{total} = \left(E_K\right)_{rot} + \left(E_K\right)_{tran}$$

or, $$\left(E_K\right)_{total} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{cm}^2 \quad ....(1)$$

As the shell completes one round, it describes angle 2π about the axis of rotation, while its centre of mass covers a linear distance $2\pi R$, where R is its radius. Thus,

जैसे ही छल्ला एक सम्पूर्ण चक्र पूर्ण करता है, यह अपनी घूर्णन अक्ष के परितः 2π का कोण बनाता है। जबकि इसका द्रव्यमान केन्द्र $2\pi R$ रेखीय दूरी तय करता है जहाँ R इसकी त्रिज्या है इस प्रकार–

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{V_{cm}} \qquad \text{or,} \qquad \omega = \frac{V_{cm}}{R}$$

$$\therefore \quad \left(E_K\right)_{total} = \frac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{V_{cm}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}MV_{cm}^2$$

or, $$\left(E_K\right)_{total} = \frac{1}{2}V_{cm}^2\left[\frac{I_{cm}}{R^2} + M\right] \quad ....(2)$$

Now for a thin spherical shell of mass M and radius R, $I_{cm} = \frac{2}{3}MR^2$. Therefore from eq^n (2), the total kinetic energy of the shell is

$$\left(E_K\right)_{total} = \frac{1}{2}V_{cm}^2\left[\frac{2}{3}M + M\right]$$

or, $$\boxed{\left(E_K\right)_{total} = \frac{5}{6}MV_{cm}^2}$$

Ques(12). A thin circular disc of radius r oscillates in its own plane about an axis passing through a point on the edge of the disc. Calculate the length of an equvalent simple pendulum.

Sol^n Let M be the mass and R be the radius of the disc. The disc oscillates as a compound pendulum whose period is

माना M डिस्क का द्रव्यमान तथा R इसकी त्रिज्या है। डिस्क एक संयुक्त दोलन की तरह दोलन करता है जिसका दोलन काल है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{k^2}{\ell}+\ell}{g}}$$

Where ℓ is thedistance of point of suspension from centre of mass of the disc and k is the radius of gyration about an axis through its centre of mass and perpendicular to the plane of oscillation.

जहाँ ℓ डिस्क के द्रव्यमान केन्द्र से निलम्बन बिन्दु के बीच की दूरी है तथा एक अक्ष के परितः घुर्णीय त्रिज्या है जहाँ अक्ष द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती है तथा दोलन तल के लम्बवत् है।

The length of equivalent simple pendulum is $\frac{k^2}{\ell}+\ell$.

l =R (radius of disc)

Now, if I is the moment of inertia of the disc about the axis through its centre, tnen

अब, यदि डिस्क की केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघुर्ण है, तो

$$I = Mk^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\therefore \qquad k^2 = \frac{1}{2}R^2$$

Therefore, the length of the equivalent simple pendulum is

$$\frac{k^2}{\ell}+\ell = \frac{\frac{1}{2}R^2}{R}+R = \frac{3}{2}R$$

and its time period is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6R}{g}}$$

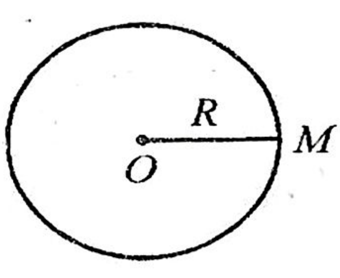
Ques(13) .Define the terms: (i) Moment of inertia

(ii) Radius of Gyration, Make a first principle calculation to obtain an expression for the moment of inertia of thin circular disc about an axis in the plane of the disc and passing through the centre. You may use any of the theorem of Moment of inertia.

Sol^n : For the definition of Moment of inertia and radius of Gyration see question no. (2).

<u>MOMENT OF INERTIA OF A THIN CIRCULAR</u> DISC :-

एक पतले वृत्ताकार डिस्क की जड़त्व आघूर्ण :-



Let us consider a hemogeneous disc of mass M and radius R, with centre at O. The mass per unit area of the disc is given by

माना एक समांगी डिस्क जिसका द्रव्यमान M, त्रिज्या R है उसका केन्द्र O पर है। द्रव्यमान प्रति एकांक क्षेत्रफल होगा

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \qquad \text{.............(1)}$$

(i). ABOUT AN AXIS PASSING THROUGH CENTRE AND PERPENDECULAR TO ITS PLANE :-

(i).केन्द्र से गुजरने वाली तथा डिस्क के तल के लम्बवत् अक्ष के परितः :—

The disc may be assumed as made up of a large number of concentric ring with common centre at O. Let us consider a ring of radius x and thickness dx. The area of this ring.

डिस्क को बहुत सारी संकेन्द्रीय छल्लों से मिलकर बना हुआ माना जा सकता है जिसका उभयनिष्ट केन्द्र O है। एक ऐसा छल्ला लिया जिसकी त्रिज्या x तथा मोटाई dx है।

$$= \pi(x+dx)^2 - \pi x^2$$
$$= 2\pi\, x.dx$$

Therefore the mass of the ring = $2\pi\, x.dx\sigma$

Now, the moment of inertia of this ring about anaxis possing through its centre and perpendicular to it plane is

केन्द्र से गुजरने वाली तथा रिंग के तल के लम्बवत् अक्ष के परितः रिंग का जड़तव आघुर्ण होगा

$$dI = 2\pi x.dx\sigma x^2$$

$$dI = 2\pi\sigma.x^3 dx \qquad \text{................(2)}$$

The M.I. of the whole disc about the axis passing through the centre and perpendicular to its plane is obtained by integrating the above expression between the limit x = 0 to x = R, thus

सम्पूर्ण डिस्क के केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघुर्ण को उपर्युक्त समी० की सीमा x = 0 से x = R तथा समाकलन से पाया जा सकता है। इस प्रकार —

$$I = \int_0^R 2\pi\sigma x^3.dx$$

$$\text{or,} \qquad I = 2\pi\sigma\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

Now using eqⁿ (1), we get

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

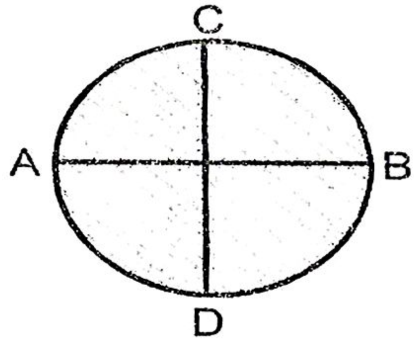
(ii) ABOUT A DIAMETER OF THE DISC :-

(ii) डिस्क के व्यास के परितः :—

Let us consider two mutually perpendicular diameters AB and CD of the disc as shown in the following figure.

माना AB तथा CD लिये गये डिस्क के दो परस्पर लम्बवत् व्यास हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

Since the disc is homogeneous therefore the moment of inertia about its diameter (I_d) are equal.
चुँकि डिस्क पूर्ण समांग है अतः इसके व्यासों (I_d) के परितः इसका जड़त्व आघुर्ण समान होगा।
Now according to the theorem perpendicular axis, we can write
अब लम्बवत्–अक्ष के परिमेय से हम लिख सकते हैं कि –



$$I_d + I_d = \frac{1}{2}MR^2$$

or, $$\boxed{I_d = \frac{1}{4}MR^2}$$

Ques(14).A solid sphere and a solid cylinder have the same mass and same redius. Will they have the same moment of inertia about their principal axis? Explain. **(2004)**

OR

A solid sphere has moment of inertia I_s about an axis through its centre. The sphere is kept in a cylindrical jar of the same radius as that of sphere and heated. The sphere melts to form a solid cylinder when solidified. The moment of inertia of the new solid about the same old axis is I_c. State if $I_s = I_c$ or $I_s > I_c$ or $I_s < I_c$. **(2004)**
Give argument only, not calculations.

Sol^n The moment of inertia of a solid about their principal axis is

ठोस गोले के मुख्य अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{2}{5}MR^2$ ....(1)

Similarly the moment of inertia of a solid cylinder about their primcipal axis is
इसी प्रकार ठोस बेलन की मुख्य अक्ष के परितः जड़त्व आघुर्ण

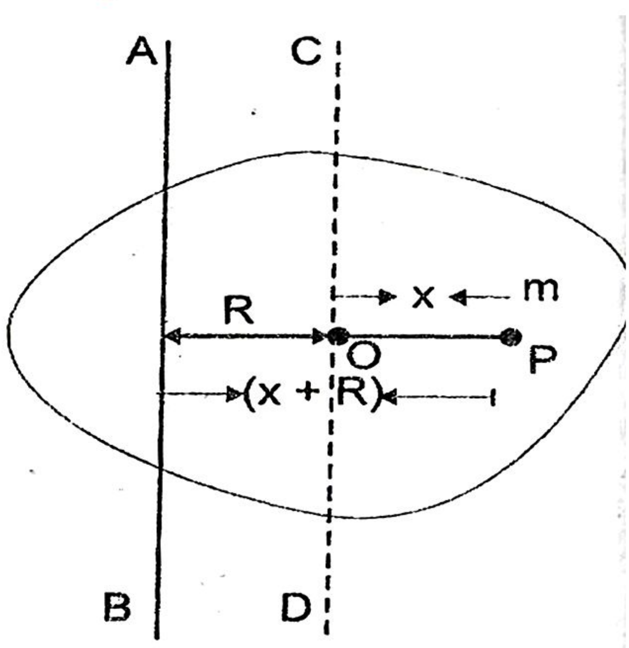
$$I_{cylinder} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad ....(2)$$

Since the mass and radius of both sphere and cylinder are same, therefore from eq^n (1) and (2) we can say that they will have different moment of inertia about their principal axis.
चुँकि द्रव्यमान तथा त्रिज्या दोंनो गोले तथा बेलन का समान है, समी० (1) व (2) से हम कह सकते हैं कि बेलन तथा गोले का उनकी मुख्य अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण अलग–अलग होगा।
From equation (1) and (2) it is clear that

$$I_C > I_S$$

Ques(15).State and explain the parallel axis theorem for moment of inertia of a rigid body. **(2006, 08, 2011,2015)**

Sol^n **Theorem of Parallel Axis :-** The theorem states that the moment of inerita of a body about any axisis equal to its moment of inertia about a parallel axis passing through its centre of gravity plus the product of its mass and the square of the distance between the two axis.



समान्तर अक्ष का सिद्धान्तः- यह सिद्धान्त कहता हैं कि किसी अक्ष के परितः किसी पिण्ड का जड़त्व आधुर्ण, इस पिण्ड के समान्तर अक्ष जो कि इसके गुरूत्व केन्द्र से गुजरता हैं के परितः जड़त्व आधुर्ण तथा पिण्ड के द्रव्यमान एवं दोनों अक्षों के बीच की दूरी के वर्ग गुर्णन के योग के बराबर होती हैं।

Let I_g be the moment of inertia of the body about the axis CD passing through its centre fo gravity and let AB be another axis parallel to CD and at a distance R. Then, the moment of inertia I of the body about AB is given by—

माना I_g पिण्ड का गुरूत्व के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष cd के सापेक्ष जड़त्व आधुर्ण हैं। माना AB, CD के समान्तर R दूरी पर एक दूसरा अक्ष हैं। तब समान्तर अक्ष के सिद्धान्त से अक्ष AB के परितः जड़त्व आधुर्ण होगा- $\boxed{I = I_g + MR^2}$

Where M is the mass of the body.

Proof:- Let AB be the axis about which the moment of inertia is to be determine and CD be another axis parallel to AB and passing through the centre of gravity. Now we consider a small element of mass 'm' at a point P at a distance x from the axis CD. The moment of inertia of the element about the axis AB is

$$= m(x+R)^2$$

माना AB अक्ष के परितः जड़त्व आधुर्ण ज्ञात करना हैं तथा cd दूसरा अक्ष है जो AB के समान्त है तथा पिण्ड के गुरूत्व केन्द्र से गुजरती हैं। अब हम अक्ष CD से 'a' दूरी पर P बिन्दू पर एक छोटा m द्रव्यमान का एक द्रव्यमान तत्व लेगें। इस तत्व की AB अक्ष के परितः जड़त्व आधुर्ण होगा-

And therefore the total moment of the body about the axis AB is

$$I = \sum m\,(x+R)^2$$

or $$I = \sum m\left(x^2 + R^2 + 2xR\right)$$

or $$I = \sum mx^2 + \sum mR^2 + 2\sum mxR$$

or $$I = I_g + R^2 \sum m + 2R \sum mx$$

or $$I = I_g + MR^2 + 0$$

or $$\boxed{I = I_g + MR^2}$$ Proved

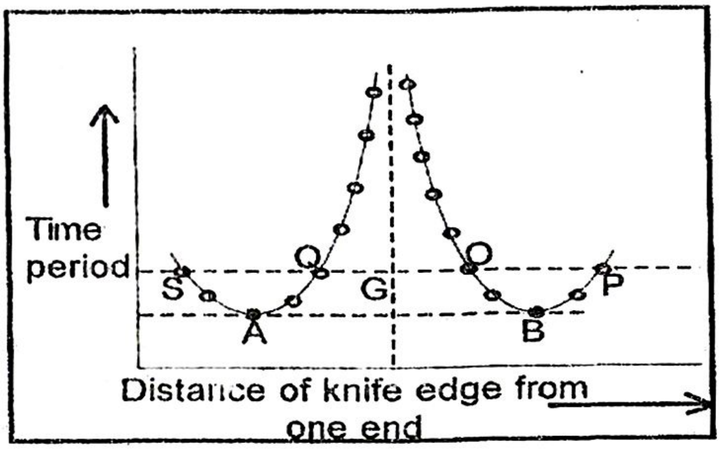
Ques(16).How will you find out graphically the radius of gyration of a compound pendulum? **(2006, 2011,2015)**

Sol^n: A rigid body, which is capable of oscillating freely about a horizaontal axis passing through it, is known as a compound pendulum. Bar pendulum is one of the most convenient and simplest form of the compound pendulum. It has been used to determine the value of acceleration due to gravity and also the radius of gyration in the laboratory. The bar is suspended on the horizaontal knife edge k, which can be inserted in any of the holes, and is allowed tooscillate in the vertical plane. the bar is alloued to oscillate after inserting the knifeedge in various holes, and time periods are obtained with the help of a stop watch. A typical variation of time-period of oscillation of the bar pendulum versus the distance of the knife edge from one end of the bar is shown in the following figure.

कोई दृढ़ पिण्ड जो कि इससे होकर गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के परितः दोलन करने के लिए स्वतंत्र हो तो इसे संयुक्त दोलक कहते हैं। बार पेण्डुलम (दोलक) एक सुविधाजनक तथा सरलतम संयुक्त दोलक का उदाहरण हैं। इसका प्रयोगशाला में गुरूत्वीय त्वरण का मान तथा जाइरेशन की त्रिज्या निकालने के लिए उपयोग किया जाता हैं। बार को क्षैतिज किनारे K से निलंबित किया जाता हैं। जिसे कि किसी भी छिद्र में व्यवस्थित किया जा सकता हैं। जिससे की बार उर्ध्वाधर तल में दोलन करेगा।

धारदार किनारा को विभिन्न छिद्रों में लगाकर दोलन कराया जाता हैं तथा स्टाप वाच की सहायता से आवर्त काल का मान देखते हैं। दोलन की आवर्तकाल तथा बार के अन्त्य बिन्दु से नाइफ किनारा तक दूरी के बीच परिवर्तन चित्र में दिखाया गया हैं।

In order to find the valve of radius of gyration graphically, draw a line in the graph corresponding to a choosen time period T. It cuts the graph at four points SQOP as shown in the above figure. Determine SO and QP. Find out it smean value It gives the valve of $\left(\ell + \dfrac{k^2}{\ell}\right)$.



The radius of gyration of the compound pendulum is calculated by the formula

$$\boxed{k = \frac{1}{2} AB}$$

AB is determine from the graph. Once AB is found radius of gyration is calculated from the above formula.

ग्राफ से गाइरेशन की त्रिज्या निकालने के लिए ग्राफ में आवर्त काल T के संगत एक रेखा खीची। यह ग्राफ को चार बिन्दुओं SQOP, चित्र के अनुसार काटता हैं। SO तथा QP की मान ज्ञात करके इसका माध्य मान निकाले जोकि (नहीं आता) के बराबर होता हैं। तथा गाइरेशन की त्रिज्या निम्न सूत्र से दिया जाता है।

$$\boxed{k = \frac{1}{2} AB}$$

AB को ग्राफ से निकाला जा सकता हैं अतः यदि AB एक बार पता चल जाय तो जाइरेशन की त्रिज्या निकाली जा सकता हैं।

Q.17 Calculate the moment of inertia of a thick spherical shell

about an axis throiugh the centre. **(2007)**

Sol. Let us consider a thick spherical shell of mass M inner radius r and outer radius R. The volume of the thick spherical shell is

मान लिया कि, एक पतला गोलीय कोश द्रव्यमान M, आन्तरिक त्रिज्या r तथा बाहरी त्रिज्या R है। पतले गोलीय कोश का आयतन

$$=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3 \quad =\frac{4}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$$

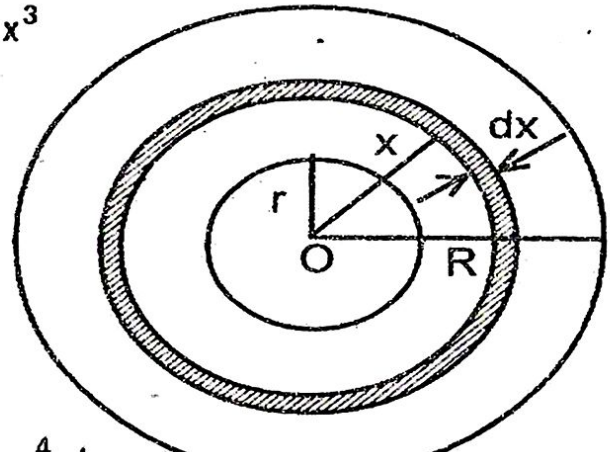
Thefefore the mass density $\rho=\frac{M}{4/3\,\pi\left(R^3-r^3\right)}$ ....(1)

Thick spherical shell can be considered as a number of concentric thin shells. Let usconsider a shell of thickness dx and radius x.

पतला गोलीय कोश, कई संकेन्द्रिय पतले कोश के रूप में माना जा सकता है। माना कि एक पतले कोश की चौडाई dx और त्रिज्या x है।

The volume of the shell $=\frac{4}{3}\pi(x+dx)^3-\frac{4}{3}\pi x^3$

$$=4\pi x^2\,dx$$



and mass of the shell $=4\pi x^2\,dx\,\rho$

Thus the moment of inertia of the shell about its diameter is

$$dI=\frac{2}{3}\text{ mass (radius)}^2$$

$$=\frac{2}{3}\,4\pi x^2\,dx\rho.x^2=\frac{8\pi}{3}\,\rho.x^4\,dx$$

The moment o inertia of thick spherical shell about an axis through the centre is obtained by integrating above expression between the limit x = r to x = R. .

पतले गोलीय कोश का, केन्द्र से जाने वाले तथा अक्ष के परितः जडत्व आघूर्ण, उपयुक्त व्यंजक को x = r तथा x = R के बीच समाकलन करके प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार,

Thus we have $I=\int_r^R dI \quad = \int_r^R \frac{8\pi}{3}\rho\,x^4\,dx$

$$I=\frac{8\pi\rho}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_r^R$$

$$I=\frac{8\pi\rho}{15}\left(R^5-r^5\right)$$

Using equation (1), then we have -

$$I=\frac{8\pi}{15}\left(R^5-r^5\right)\frac{M}{4/3\,\pi\left(R^3-r^3\right)}$$

or $$I = \frac{2}{5} M \left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right)$$ Ans.

Q.18 A ball start from rest and roll down a 30° inclined plane. Find acceleration and time to cover 7 m.

Sol. The expression for the acceleration of a body rolling down an inclined plane is

$$a = \frac{g \sin\theta}{\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)} \quad \text{...............(1)}$$

The moment of inertia of a solid sphere about its diameter is given by

$$I = Mk^2 = \frac{2}{5} MR^2 \Rightarrow \frac{k^2}{R^2} = \frac{2}{5}$$

putting this value in equation (1), then we get

$$a = \frac{g \sin\theta}{\left(1 + \frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{7} g \sin\theta$$

or $$a = \frac{5}{7} \times 9.8 \times \sin 30$$

$$a = 5 \times 1.4 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a = 3.5 \text{ m/sec}^2$$

Now $$S = ut + \frac{1}{2} at^2$$

or $$7 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)t^2$$ or $$t^2 = \frac{7 \times 4}{7} = 4$$

or $t = 2$ sec.

Ques 19: (a) Find an expression for the time period of a compound pendulum.

(b) Show that centre of suspension and oscillation are interchangeable. Find the condition of minimum time period. (2009, 2011)

Soln. (a) See Q. No. 6.

(b) Interchangeability of Centre of Suspension and Oscillation :

About the centre of suspension, the time period of the body is

दोलन व उत्केन्द्रता केन्द्र का अन्तः परिवर्तन :

किसी पिण्ड के उत्केन्द्रता केन्द्र के परितः आवर्तकाल

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(k^2 / l + l\right)}{g}} \quad \text{..................(1)}$$

Now, the body is inverted and suspended from the centre of oscillation. In this case the new time period of oscillation T' will be obtained by substituting $\left(k^2/l\right)$ in place of l in equation (1) i.e.

अब, पिण्डे को उल्टा करके दोलन बिन्दु के परितः लटकाने पर इस दशा में नया आवर्तकाल (T') समी० 1 में (l) के स्थान पर $\left(k^2/l\right)$ रखने पर प्राप्त होगा–

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\dfrac{k^2}{\left(k^2/l\right)} + \left(\dfrac{k^2}{l}\right)}{g}}$$

or $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l + k^2/l}{g}} = T'$$

That is, the time periods of compound pendulum about the centre of suspension and oscillation are equal or the centre of suspension and oscillation are interchangeable.

अर्थात् दोलन व उत्केन्द्रता केन्द्र के परितः संयुक्त लोलक का आवर्तकाल अन्तः परिवर्तन होता है।

Condition of Minimum Time Period :

A compound pendulum, suspended at a point distant l from the center of mass, oscillates with a period

न्यूनतम आवर्तकाल की दशा : एक संयुक्त लोलक द्रव्यमान केन्द्र से (l) दूरी पर एक बिन्दु पर स्थित है, आवर्तकाल (T) से दोलन करता है–

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(k^2/l\right) + l}{g}}$$

Squaring on both side, then we get

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{k^2}{l} + l\right)$$

Differentiating it with respect to l, then we get

$$2T\frac{dT}{dl} = \frac{4\pi^2}{g}\left(-\frac{k^2}{l} + 1\right)$$

Period T will be minimum or a maximum when $\dfrac{dT}{dl} = 0$, that is

$$-\frac{k^2}{l^2} + 1 = 0$$

or $$\frac{k^2}{l^2} = 1$$

or $$l = \pm k$$

For $l = \pm k$, $\frac{d^2T}{dl^2}$ is positive. Therefore, the time period T will be minimum when $l = \pm k$.

Putting $l = k$, minimum time period is given by

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{k^2}{k}\right) + k} = 2\pi\sqrt{\frac{k+k}{g}}$$

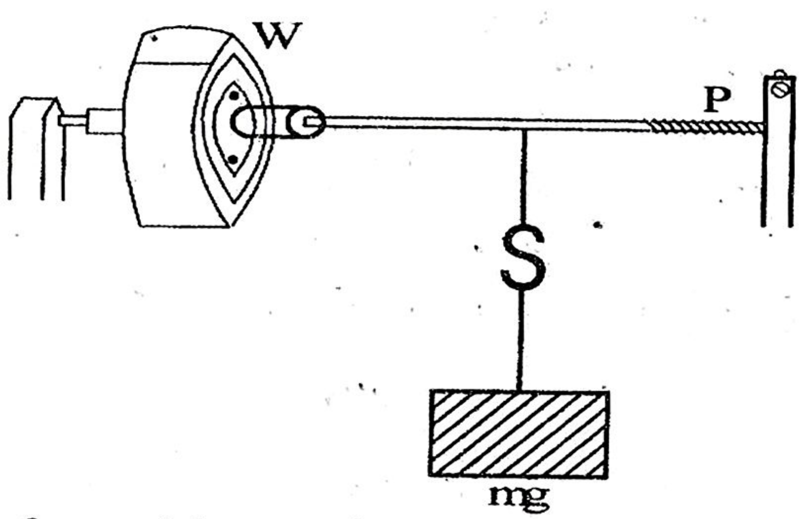
or $$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}}$$

Q20. Employing the energy conservation law for a flywheel in rotational motion obtain the expression for determining the moment of inertia of the flywheel. **(2012)**

Sol^n. A Flywheel is a large heavy wheel with a long cylindrical axle passing through its centre. Its shape is such that its most of the mass is concentrated at the rim. Its centre of gravity lies on its axis of rotation so that it can come to rest in any desired position. A fly wheel whose moment of inertia is to determined is shown in the following figure.

फ्लाई व्हील एक बड़ा भारी व्हील होता है जिसके केन्द्र से एक लम्बी बेलनाकार आकृति गुजरती है। इसका आकार इस प्रकार से होता है कि ज्यादातर इसका द्व्यमान इसके रीम पर हो। इसका गुरुत्वीय केन्द्र इसके घुमावदार अक्ष पर होता है जिससे यह किसी भी वांछित अवस्था में रूक सके। एक फ्लाई व्हील जिसका जड़त्व आघूर्ण हमे निकालना है निम्न चित्र में प्रदर्शित है।

When the mass is allowed to fall under gravity the flywheel rotates about its own axis. Let v be the velocity acquired by the wheel and n_1 is the rotations performed by it upto the instant, when the cord just leaves the axle.



The loss of potential energy in dropping mass m through a distance h is mgh. This potential energy is used up in giving the kinetic energy to the system and against frictional work done i.e.

जब हम द्रव्यमान को गुरूत्वीय त्वरण के अधीन गिरने देते हैं तो फ्लाई व्हील अपने

अक्ष के परितः घूमने लगता है। माना v व्हील द्वारा ग्रहण की गई गति है तथा n_1 धागे के छूटने से पहले तक व्हील द्वारा किये गये चक्करों की संख्या है।

अतः m द्रव्यमान के पिण्ड को h ऊँचाई से गिरने में खर्च हुई कुल स्थितिज ऊर्जा = mgh

यह स्थितिज ऊर्जा निकाय की गतिज ऊर्जा बढ़ाने तथा घर्षण के विरूद्ध कार्य करने में खर्च होती है। अत :

(1) Gain in kinetic energy by the dropping mass $= \frac{1}{2}mv^2$

गिरते हुए द्रव्यमान के द्वारा ग्रहण (लाभ) की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

(2) Gain of rotational kinetic energy by the flywheel $= \frac{1}{2}I\omega^2$

फ्लाई व्हील के द्वारा ग्रहण (लाभ) की गयी घूर्णन गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}I\omega^2$

(3) Work done against force of friction = n_1F where F is the amount of work done per revolution against the force of friction.
घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य = n_1F
जहां F प्रत्येक चक्कर में घर्षण के विरूद्ध किया गया कार्य है।
Thus from the law of conservation of energy
अतः ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2 + n_1F \quad \text{................(1)}$$

When the cord is detached from the axle the fly wheel rotates with the maximum angular velocity ω but due to frictional force acting on its bearings the wheel comes to rest after perferming n_2 rotation. The whole rotational kinetic energy of the wheel is used up in doing work against friction hence

जब धागा फ्लाई व्हील के घूर्णन अक्ष से छूटता है तब व्हील अपने अधिकतम कोणीय चाल ω से गति करता है लेकिन घर्षण के कारण इसकी गति कम हो जाती है और यह n_2 चक्कर के बाद रूक जाता है। फ्लाई व्हील की कुल घूर्णन गतिज ऊर्जा घर्षण के विरूद्ध कार्य करने में खर्च हो जाती है अतः

$$n_2F = \frac{1}{2}I\omega^2$$

substituting the value of F, obtained from equation (2) to equation (1) we get,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}n_1\left(\frac{I\omega^2}{n_2}\right)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) \qquad \because v = r\omega$$

where r is the radius of the axle.
Now the energy equation can be written as

$$2mgh = mr^2\omega^2 + I\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)$$

or $$I = \frac{2mgh - mr^2\omega^2}{\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)}$$ ....(3)

At the time, when the card leaves off the axle, the wheel possesses the maximum angular velocity ω and after making n_2 rotations in a time t seconds, its velocity is reduced to zero. Assuminy that the friction is steady during this time, the average angular velocity during these t seconds is $\left(\frac{\omega+0}{2}\right) = \frac{\omega}{2}$ Thus,

उस समय जब धागा घूर्णन अक्ष को छोड़ देता है व्हील का कोणीय वेग अधिकतम होता है तथा n_2 चक्कर t सेकेण्ड में पूरा करके व्हील रूक आती है अर्थात इसका वेग शून्य हो जाता है। माना कि इस समय में र्घषण बल नियत रहता है अतः इस t समय में औसत कोणीय वेग $\frac{u+\omega}{2} = \frac{\omega}{2}$ होगा अतः।

$$\frac{\omega}{2} = \frac{2\pi n_2}{t}$$

or $$\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$$ ....(4)

substituting the value of ω from equation (4) to equation (3) we get,

$$I = \frac{2mgh - mr^2\left(\frac{4rn_2}{t}\right)^2}{\left(\frac{4rn_2}{t}\right)^2\left(\frac{n_1+n_2}{n_1}\right)}$$

or $$I = \frac{m(ght^2 - 8r^2n_2^2r^2)}{8r^2n_2(n_1+n_2)}$$ ....(5)

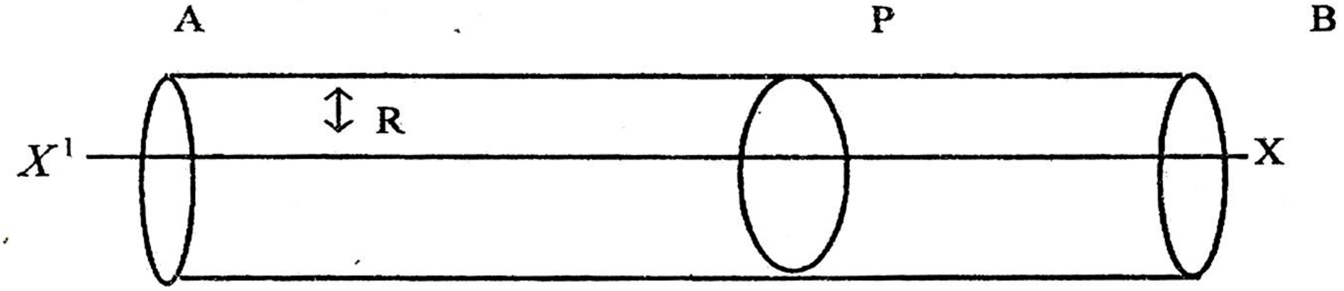
It is an expression of moment of inertia of a Fly-wheel about axis of rotation.

Que.(21) Find the moment of inertia of solid cylinder about its own axis.

Sol. Moment of inertia of cylinder about its own axis :- Let ρ be the tensity of its material XX^1 is its geometrical axis about which its moment of mertia is to be determined. This cylinder may be assumed to be made up of a large number of thin coaxial discs. Let mass of each of these discs is m. Moment of inertia of one disc PQ about XX^1 is

$$\frac{1}{2} x\, masx(radius)^2$$

$$= \frac{1}{2}mR^2$$



Moment of inertia I of whole cylinder abount XX^1 will be equal to the sum of moment ~~of inertia of these disc. That id :~~------------------------------->1

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 + ----$$

or $$I = \sum \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 \sum m$$

But $\sum m = M$ is the mass of the cylinder -

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

Q.22 Describe practical method of determination of acceleration due to gravity with compound pendulum. Deduce the formula used.(2015)

Sol. To determine the value of g with the help of a bar pendulum, we find two points in the pendulum lying on the opposite sides of its centre of mass at unequal distances from centre of mass such that the period about them are equal. Out of these point one is the centre of suspension and other is centre of oscillation. Let this distance be L. The period T is given by

बार लोलक की सहायता से g का मान ज्ञात करने के लिए हम बार लोलक पर दो बिन्दु विपरीत दिशा में प्राप्त करते हैं जहाँ पर आवर्त काल समान होता है। इन दोनो बिन्दुओं मे से एक सस्पेन्सन का केन्द्र तथा दूसरा आक्सीलेशन का केन्द्र होता है। माना यह दूरी L है। आवर्त काल होगा–

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)} \quad \text{or} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

$$g = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)L \qquad ....(1)$$

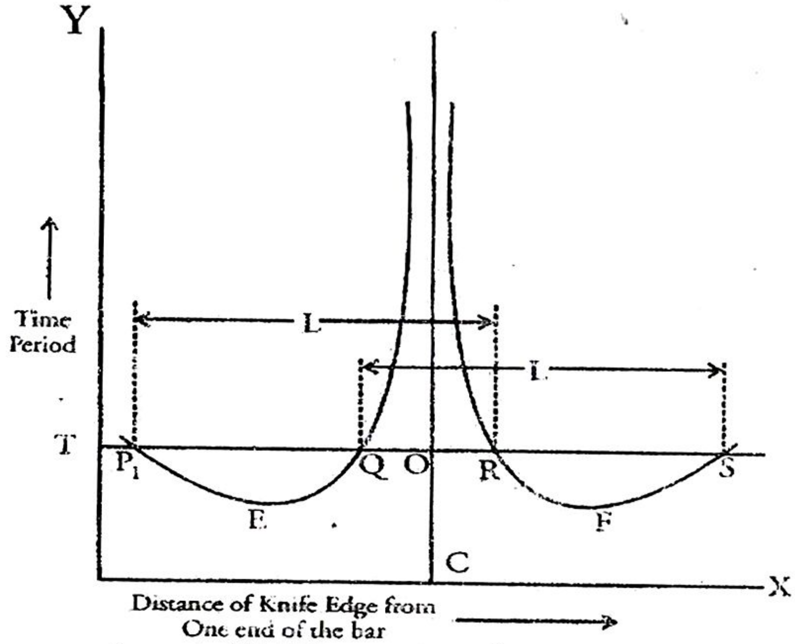
Bar pendulum consists of a rectangular metallic bar about one metre in length Equidistant holes are drilled along its length. The bar can be suspended through any of there holes by a knife edge. The knife-edge is attached to a wooden plate which rests on a table and carries a screw.

बार लोलक एक मीटर लम्बा बार होता है जिसमें समान दूरी पर होल किया होता है। बार लोलक को हम किसी एक होल के सहारे लटकाते हैं।

Method – The bar pendulum is put in the hole at one end and displaced slightly to one side and released. It makes oscillation about the horizontal knife edge. The period of oscillation is determined by recording the time for about fifty oscillations similarly, the period is determined with the bar supported on the knife edge successive through each of the holes from one end to other.

विधि- बार लोलक को सर्वप्रथम एक होल के सहारे लटकाते हैं और फिर थोड़ा विस्थापित करके छोड़ देते है। जिससे यह दोलन करने लगता है। 50 दोलन का समय ज्ञात कर इसका आवर्त काल ज्ञात कर लेते हैं। इसी प्रकार बार लोलक को दूसरे होल के सहारे लटका कर आवर्तकाल ज्ञात कर लेते है।

Calculation – A graph is plotted between the period T and the distance of knife-edge from the end of the bar. It consists of two parts symmetrical about a line, which intersect the x-axis at point C, centre of mass of the bar about which period is infinite. A straight line is drawn parallel to x-axis, intersecting the y-axis at T. This line cuts the curve at four points P,Q, R and S. Period



about any of these points is T. The pair of points P and R (or Q and S) are situated on opposite sides of the centre of mass C at unequal distances from it. So these points correspond to centre of suspension and centre of oscillation. The distance PR or QS is the length of the equivalent simple pendulum.

$$L = (PR+QS)/2$$

putting the value of T and L in euqation (1), the value of g is calculated. Similarly we can draw other lines parallel to x-axis, cutting the curve at four points and calculate the value of g.

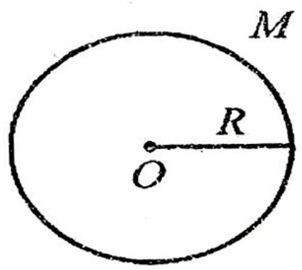
गणना– आवर्त काल तथा बार लोलक के एक सिरे से होल की दूरी के बीच ग्राफ खींचते हैं। यह एक दो भागो वाला सिमेट्रिकल ग्राफ है जो कि x–अक्ष को C बिन्दु पर काटता है जहाँ आवर्त काल अनन्त है। एक सीधी रेखा जो कि x–अक्ष के समानान्तर है y–अक्ष को T बिन्दु पर काटती है। यह रेखा ग्राफ को चार बिन्दु P,Q, R तथा S पर काटती है। चारो बिन्दुओं के सापेक्ष आवर्त काल T है। जोड़े के बिन्दु P और R या Q और S द्रव्यमान के केन्द्र C के विपरीत दिशा में स्थित हैं। दूरी PR या QS इसके समतुल्य सरल लोलक की लम्बाई है। T तथा L का मान समीकरण (1) में रखकर g का मान ज्ञात कर लेते हैं। ठीक इसी प्रकार दूसरी रेखा x–अक्ष के समान्तर खींचते है जो कि पुनः चार बिन्दुओं पर काटती है तथा g का मान ज्ञात कर लेते हैं।

Q.23 Derive the expression for moment of inertia of a ring about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane.

(GKP-2016)

Sol. : <u>Moment of Inertia of a ring :</u> Let us consider a ring of Mass 'M' and radius 'R' as shown in the following figure-

मान लिया कि एक रिंग है जिसका द्रव्यमान M तथा R त्रिज्या है।



We want to calculate the Moment of Inertia of this ring about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane.

हम इस रिंग का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के परितः निकालना चाहते हैं जो इसके केन्द्र से गुजरता है तथा इसके प्लेन के लम्बवत् है।

Consider a particle of mass 'm' of the ring. Its moment of inertia about an axis passing through 'O' and perpendicular to its plane is mR^2. Therefore the moment of inertia of the entire ring about the given axis will be -

माना रिंग के एक कण का द्रव्यमान m है। इसका जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के परितः जो केन्द्र O से गुजरता है तथा तल के लम्बवत है, mR^2 होगा अतः पूरे रिंग का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के परितः होगा

$$I = \sum mR^2 = R^2 \sum m$$

or, $$I = MR^2$$

•••••••••••••••