6 - ELASTICITY

Ques(1) State Hooks law? explain poisson's ratio.? Show that the theoretical limiting values of Poisson ration are -1.0 and 0.5. Desribe searles method for the determination of its value. (1999, 2001)

OR Explain the value of poisson ratio in less than one (2009)

Sol^n : HOOK'S LAW :- According to Hook law, within elastic limit, strain is directly propartional to stress i.e.

हुक का नियमः-- हुक के नियम के अनुसार प्रत्यास्थ सीमा के भीतर विकृति, प्रतिबल के अनुक्रमानुपाती होता है। अर्थात,

$$\text{Strain } \alpha \text{ Stress}$$

$$\frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} = E = \text{Constant}$$

This constant E is called the modulus of elasticity. Since strain does not have any unit or dimension therefore E has the same unit and dimension as stress.

इस नियतांक E को प्रत्यास्था गुणाँक कहते हैं। चूँकि विकृति की कोई ईकाई नहीं होती है, अतएवं E की वही इकाई होती है जो प्रतिबल की।

POISSON'S RATIO :- The ratio of change in dimension to the initial dimension, perpendicular to the direction of the forces is called lateral strain. Within elastic limit, the lateral strain is proportional to the longitudinal strain i.e, the ratio of lateral strain and longitudinal strain is constant for the material of a body. This constant is known as Poisson's ratio.

If β and α are the lateral and longitudinal strain respectively, then

प्वाइजन का अनुपातः— विमा में बदलाव का प्रारम्भिक विमा से अनुपात जो बल की दिशा के लम्बवत् होता है, पार्श्व विकृति कहलाता है। प्रत्यास्था सीमा के भीतर पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात् पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात पिण्ड के पदार्थो के लिए नियत होता है। इस नियतांक को प्वाइजन का अनुपात कहते हैं।

Poisson's ratio $\sigma = \beta / \alpha$

LIMITING VALUES OF σ :- (SU-2016)

We know that

$$3K(1-2\sigma) = (1+\sigma)\ 2\eta$$

Whre K and η are essentially positive quantitive. Therefore,

(i) If Poisson's ratio is a positive quantity, then both right hand side and left hand side of above equation must be positive. this is possible when

(i) यदि σ एक धनात्मक संख्या है तब उपर्युक्त समी० को दांये पक्ष तथा बांये पक्ष भी धनात्मक होने चाहिए, यह तब ही संभव है जब

$$(1-2\sigma) > 0$$

$$\text{or, } \sigma < 1/2 \text{ OR } 0.5$$

(ii) if σ is a negative quantity, left hand side expression of the above equation will be positive. Then, the right hand side expression must also be positive. Hence

(ii) यदि σ एक ऋणात्मक संख्या है तब उपर्युक्त समी० का बांया पक्ष धनात्मक होगा अतः

दांया पक्ष भी धनात्मक होना चाहिए। अर्थात्

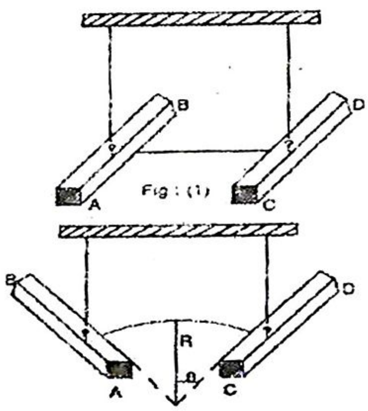
$$(1 + \sigma) > 0 \text{ or } \sigma > -1$$

Thus the theoretical limiting valves of σ are -1 and 0.5, i.e.

$-1 < \sigma < 0.5$

SEARLE'S METHOD :- The apparatus consist of two exactly equal rods AB and CD of square or circular cross-section. They are connected together at their middle points by the specimen wire and suspended by silk threads from a rigid support. When the rod suspended, are brought near to each other through equal distances and then released, they execute tortional vibrations in a horizontal plane due to the couple exerted by the specimen wire on the two rods.

उपकरण में दो वर्गाकार या वृत्ताकार परिच्छेद के एक समान छड़ AB तथा CD लिया जाता है। दोनों छड़ अपने मध्य बिन्दु पर एक स्पेशिमन तार से जुड़े रहते हैं और एक ठोस आधार से एक सिल्क के धागे से निलंबित रहते हैं। जब ये निलंबित छड़ समान दूरी के तहत एक दूसरे के समीप लाकर छोड़े जाते हैं तो वे क्षैतिज तल में टारसनल कम्पन्न प्रकट करते हैं। जो कि स्पेसीमन तार द्वारा उत्पन्न युग्म से उत्पन्न होता है।



YOUNG MODULUS :- Let θ be the angle through which each rods turned from normal position. Then the angle subtended by the bent wire, at the centre of curvature O is 2θ and obviously.

यंग गुणांकः– माना प्रत्येक छड़ अपने सामान्य स्थिति से θ कोण पर घुमायी जाती है (चित्र 2)। तब वक्रता O केन्द्र पर झुके तार द्वारा उत्पन्न कोण 2θ होगा। स्पष्टया

$$l = R.2\theta$$

Where R is the radius of curvature of the bent were. From the theory of bending of beam, moment of the internal couple or bending moment

$$= YIg / R$$

Where Ig is geometrical moment of inertia and Y is young modulus of the material of the wire.

Moment of the couple = $YIg.2\theta / l$

For a wire of radius r, $Ig = \pi r^4 / 4$

Therefore Moment of the couple $= \dfrac{\pi r^4 Y\theta}{2l}$ ....(i)

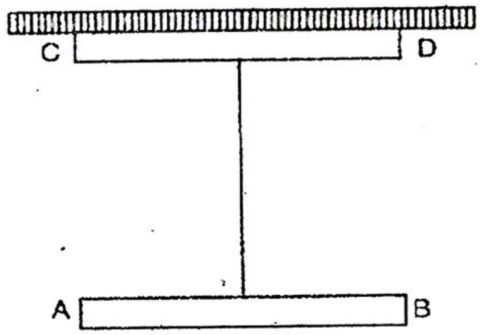
This couple produces an angular acceleration $d^2\theta / dt^2$ in each rod. If I is the moment of inertia of either rod AB or CD about the thread then the moment of the couple is

यह कपुल प्रत्येक छड़ में कोणीय त्वरण $d^2\theta / dt^2$ उत्पन्न करेगा। यदि तार के सापेक्ष किसी छड़ AB या CD का जड़त्व अघुर्ण I हो तब युग्म आघुर्ण होगा।

$$I.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Hence the equation of motion is

$$I.\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\pi r^4 Y}{2l}\theta = 0$$



$$\text{or,}\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\pi r^4 Y}{2lI}\theta=0$$

The above equation represents a simple harmonic motion of period.

$$\sigma=\frac{Y}{2\eta}\ =2\pi\frac{T_2^{\ 2}}{2T_1^{\ 2}}-1,\ \text{therefore}$$

$$\boxed{Y=\frac{8\pi lI}{T_1^{\ 2}r^4}}$$

MODULUS OF RIGIDITY :- Now the suspension threads are removed one rod say CD is clamped horizentally to a rigid support and the other is given a slight rotations so as to twist the specimen wire. When released, it executes tortional vibrtions about the wire. Its time period T_2 is determined . Then

दृढ़ता गुणांकः– अब निलंबन धागे को हटा दिया और एक राड माना CD को एक ठोस आधार के सहारे क्षितिज रूप से बांध दिया गया तथा दूसरे छड़ को हल्का घुमा दिया गया जिससे वह स्पेसीमेन तार में ऐंठन कर सके। यह तार के तहत टारशतल कम्पन्न प्रकट करता है।

अब हम इसको आवर्तकाल T_2 की गणना कर सकेंगें

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{I'}{C}}$$

$$\text{or,}\quad T_2=2\pi\sqrt{\frac{2lI}{\eta\pi r^4}}\qquad\left[\because C=\frac{\eta\pi r^4 I}{2l}\right]$$

$$\text{or,}\quad \eta=\frac{8\pi lI}{T_2^{\ 2}r^4}\qquad \text{........(2)}$$

POISSON'S RATIO :- From equatiom (1) and (2), we have

$$\frac{Y}{\eta}=\frac{T_2^{\ 2}}{2T_1^{\ 2}}$$

But poisson's ratio

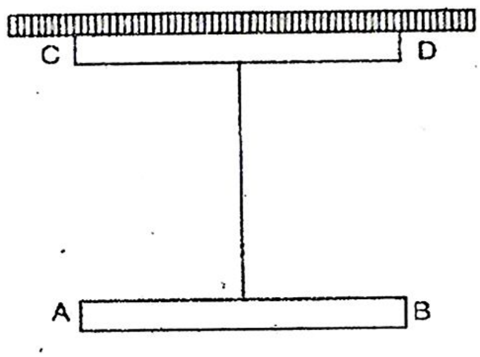
$$\sigma=\frac{T_2^2}{2T_1^2}-1,\qquad \text{therefore}$$

$$\boxed{\sigma=\frac{T_2^2}{2T_1^2}-1}$$

Ques(2) Obtain the depression at the free end of a thin rectangular light beam clamped horizontally at one end and loaded at the other end.

(2000,2013)

Sol^n Let a beam of length l be fixed at its one end A and loaded with a load W



or, $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\pi r^4 Y}{2lI}\theta=0$$

The above equation represents a simple harmonic motion of period.

$$\sigma=\frac{Y}{2\eta}=2\pi\frac{T_2^{\,2}}{2T_1^{\,2}}-1,\ \text{therefore}$$

$$\boxed{Y=\frac{8\pi lI}{T_1^{\,2}r^4}}$$

MODULUS OF RIGIDITY :- Now the suspension threads are removed one rod say CD is clamped horizentally to a rigid support and the other is given a slight rotations so as to twist the specimen wire. When released, it executes tortional vibrtions about the wire. Its time period T_2 is determined . Then

दृढ़ता गुणांकः— अब निलंबन धागे को हटा दिया और एक राड माना CD को एक ठोस आधार के सहारे क्षितिज रूप से बांध दिया गया तथा दूसरे छड़ को हल्का घुमा दिया गया जिससे वह स्पेसीमेन तार में ऐंठन कर सके। यह तार के तहत टारशतल कम्पन्न प्रकट करता है।

अब हम इसको आवर्तकाल T_2 की गणना कर सकेंगें

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

or, $$T_2=2\pi\sqrt{\frac{2lI}{\eta\pi r^4}}\qquad\left[\because C=\frac{\eta\pi r^4 I}{2l}\right]$$

or, $$\eta=\frac{8\pi lI}{T_2^{\,2}r^4}\qquad ....(2)$$

POISSON'S RATIO :- From equatiom (1) and (2), we have

$$\frac{Y}{\eta}=\frac{T_2^{\,2}}{2T_1^{\,2}}$$

But poisson's ratio

$$\sigma=\frac{T_2^2}{2T_1^2}-1,\qquad \text{therefore}$$

$$\boxed{\sigma=\frac{T_2^2}{2T_1^2}-1}$$

Ques(2) Obtain the depression at the free end of a thin rectangular light beam clamped horizontally at one end and loaded at the other end.

(2000,2013)

Sol^n Let a beam of length l be fixed at its one end A and loaded with a load W at B. Let the end B be deflected to the position B' under the action of the loa W.consider a section of the beam as at P, at a distance x from the end A. Th moment of the bending couple due to the load W = W (l - x)

माना एक बीम जिसकी लम्बाई l है अपने एक सिरे A पर स्थिर है तथा दूसरे B पर W भा है। माना सिरे B भार W के कारण पर B' विस्थापित होता है। माना A सिरे से दूरी x पर बीम का को भाग P पर है। भार के कारण बेंडिंग युग्म आघुर्ण होगा $W = W(l - x)$

The bending moment

$$= YI / R$$

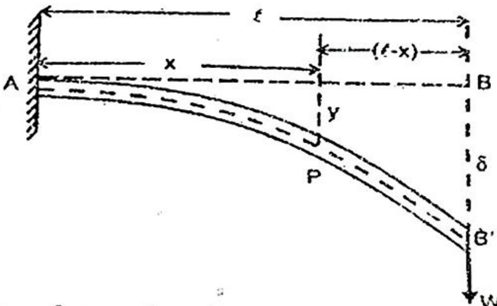
Where Y is the young Modulus of the material of the beam, I geometrical moment of inertia of the section and R the radius ofcurvature of the natural axis at the section.

जहाँ Y बीम के पदार्थ का यंग गुणांक है, I परिच्छेद का ज्यामीतिय जड़त्व आघुर्ण है तथा R परिच्छेद के स्वाभाविक अक्ष का वक्रता त्रिज्या चर है।

Thus,

$$YI / R = W(l-x) \qquad \text{------------(1)}$$

The radius of curvature R is given by the equatior



$$R = \frac{\left\{1+(dy/dx)^2\right\}^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

Where y is the depression of the beam at a distance x from the fixed end. Since y is small, $(dy/dx)^2$ can be neglected in comparison to 1. Hence, we get

$$R = \frac{1}{d^2y/dx^2}$$

Substituting for R in eqn (i) above, we have

$$YI.\frac{d^2y}{dx^2} = W\,(l\text{-}x)$$

$$\text{or,} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{YI}(l\text{-}x) \quad \text{..........(2)}$$

Integrating equation (2), we get :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{yI}\left(1x - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

where C_1 is constant of integration, Which can be known from the conditions of the problem. One such condition is that at x = 0

dy / dx = 0

Applying this condition in equation (3), we have C_1 = 0 and thus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{YI}\left(lx\text{-}\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{..........(4)}$$

It is pointed out that at P, the slope of the curve tanθ = dy /dx, θ being the angle between X-axis and tangent at P of the bent portion APB'.

बिन्दु P पर वक्र का ढ़ाल tanq = dy /dx जहाँ θ झुके भाग APB' के बिन्दु से खींचे गये स्पर्श रेखा तथा X-अक्ष के बीच का कोण है।

Thus

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{W}{YI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Integrating once again,

$$y = \frac{W}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C \quad \text{..........(4)}$$

Where C_2 is another constant of integration. But at x = 0, y = 0, hence substitut ing these values in eqn(4),

जहाँ C_2 दूसरा समाकलन नियतांक है। किन्तु x=0 पर y=0 इस मान को उपर्युक्त समी० में रखने पर हम पाते हैं कि

we get, $C_2 = 0$

Thus, the expression for the depression y at a distance x from the fixed end is

$$y = \frac{W}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad \text{..........(5)}$$

At the force end , x = l and let y = δ, then

$$\delta = \frac{W}{YI}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right)$$

or, $$\boxed{\delta = \frac{W}{YI}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right)} \quad \text{..........(6)}$$

Far a beam of rectangular cross-section of breadth b and depth d,

$$I = bd^3 / 12$$

Therefore,

$$\delta = \frac{4Wl^3}{Ybd^3} \quad \text{..........(7)}$$

For a beam of cii ular cross-section of radius r,

$$I = \pi r^4 / 4$$

Therefore,

$$\boxed{\delta = \frac{4Wl^3}{3\pi r^4 Y}}$$

Ques(3) A bar of 1 meter long, 5 m.m. square in cross-section supported harizontally at its end and loaded at the middle is depressed 1.96 m.m by a load of 100 gm. Calculate the young modulus for the material of the bar? given g = 980 c.m /s³. (2000)

Solⁿ The depression of bar loaded in the middle

$$Y = \frac{Wl^3}{48YIg}$$

Now

W = 100gm = 0.1 kg = 0.98 N

y = 1.96 m.m = 1.96 ´ 10^{-3}m

आयतन प्रत्यास्था का गुणांक कहलाता है। यह K से प्रदर्शित किया जाता है। प्रति इकाई क्षेत्रफल पर बल को दाब कहते हैं। यदि P पिण्ड के दाब में बदलाव हो तथा मूल आयतन V में बदलाव हो तो

$$\boxed{K = \frac{PV}{\delta V}}$$

The quantity 1/K is called the compressbility of the material.

MODULUS OF RIGIDITY :-

The ratio of the shearing stress to shearing strain is called modulus of rigidity and is denoted by letter η. The shear strain is measured in term of angle. Thus if S is the shearing stress and θ is shear strain, then

विरूपक प्रतिबल विरूपक विकृति से अनुपात को दृढ़ता गुणांक कहते हैं तथा इसे η से प्रदर्शित करते हैं। विरूपक विकृति को कोण के पद में प्रदर्शित करते हैं। अतः S यदि विरूपक प्रतिबल तथा σ विरूपक विकृति है तो

$$\boxed{\eta = \frac{S}{\theta}}$$

Its unit is same as that of stress.

POISSON'S RATIO (σ) :- (2013)

The ratio of change in dimension to the initial dimension, perpendicular to the direction of the forces is called lateral strain. Within elastic limit the lateral strain is proportional to the longitudinal strain i.e. the ratio of lateral strain and longitudinal strain is a constant for the material of a body. This constant is known as the poisson ratio .

विमा में बदलाव का प्रारम्भिक विमा से अनुपात, जो कि बल की दिशा के लम्बवत् है, भीतर पार्श्व विकृति कहलाता है। प्रत्यास्था सीमा के भीतर पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात् पार्श्व विकृति का अनुदैर्ध्य विकृति से अनुपात नियत होता है। इस नियतांक को प्याइजन का अनुपातन σ कहते हैं।

If β and α are the lateral and longitudinal strain respectively, then.

$$\boxed{\text{Poisson's } (\sigma) = \frac{\beta}{\alpha}}$$

Ques(5) Derive relation between Y, K, η and σ.?

(GKP-2002, 2012,2014,2015,2016)

OR Write short notes or relation between elastic constents. (2008)

Sol^n: (I) RELATION BETWEEN Y, K AND σ :-

Let ABCDEFGH represent a cube of unit side. Let us consider a force F, which acts normally and uniformly on each of it six faces in the outward direcetion. Since each force F is acting on unit area, these forces representing stresses'.

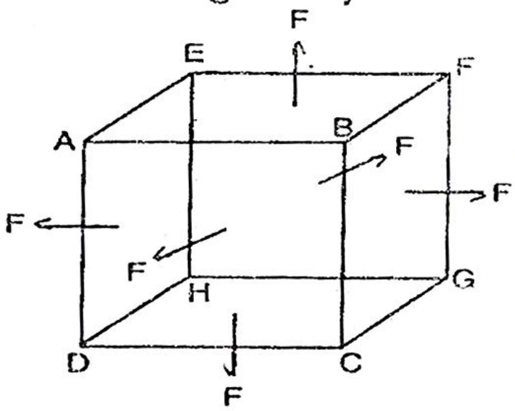
माना ABCDEFGH इकाई भुजायी एक घन है। माना एक बल F प्रत्येक 6 भुजाओं पर वाह्य दिशा में अभिलम्बवत कार्य करता है। चूँकि यह बल F इकाई क्षेत्रफल के अनुदिश कार्य करता है।

If α and β be the linear and lateral strain per unit stress i.e. if α be the increase per unit length per unit stress along the direction of stress and β be the contraction per unit length per unit stress perpendiular to the stress then the elongation produced in the edge AB due to F = Fα and contraction produce is Fβ .

अतः यह बल प्रतिबल को प्रदर्शित करता है। माना α तथा β प्रति इकाई प्रतिबल पर

तथा रेखीय पार्श्वीय प्रतिबल हैं अर्थात् यदि α प्रतिबल की दिशा में प्रति इकाई प्रतिबल प्रति इकाई लम्बाई पर वृद्धि है तथा β प्रतिबल के लम्बवत प्रति इकाई प्रतिबल प्रति इकाई लम्बाई पर अकुंचन हो तो भुजा AB उत्पन्न वृद्धिकारी बल F के कारण $F\alpha$ होगा तथा उत्पन्न अकुंचन $F\beta$ होगी।

Hence the sides of the cube become



$$AB = 1 + F\alpha - F\beta - F\beta = 1 + F(\alpha - 2\beta)$$

$$BF = 1 + F\alpha - F\beta - F\beta = 1 + F(\alpha - 2\beta)$$

$$BC = 1 + F\alpha - F\beta - F\beta = 1 + F(\alpha - 2\beta)$$

Hence the final volume of the cube is

$$AB \times BP \times BC = [1 + F(\alpha - 2\beta)] = 1 + 3F(\alpha - 2\beta)$$

Thus change in volume = Final volume - Initial volume

$$\Delta V = 1 + 3F(\alpha - 2\beta) - 1$$

$$\Delta V = 3F(\alpha - 2\beta)$$

$$\text{Volume strain} = \frac{3F(\alpha - 2\beta)}{1} = 3F(\alpha - 2\beta)$$

Therefore the Bulk modulus of the material of the cube is

$$K = \frac{\text{Stress}}{\text{Volume Strain}} = \frac{1}{3(\alpha - 2\beta)}$$

or,
$$K = \frac{1}{3(\alpha - 2\beta)} = \frac{1/\alpha}{3\left(1 - 2\beta/\alpha\right)}$$

But α in the longtudinal strain per unit stress, therefore y_α represent

young Modules of electricity i-e $y = \frac{1}{v}$

and also $\beta / \alpha = \sigma$ = Poisson's ratio.

Therefore,

$$\boxed{K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}} \qquad \text{........ (1)}$$

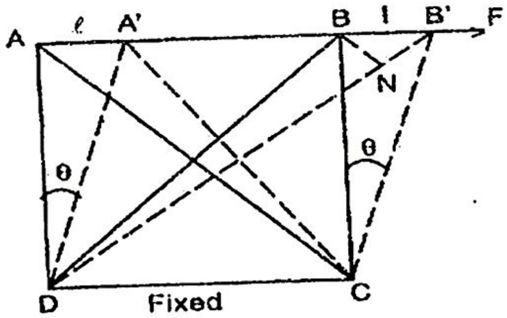
(II) RELATION BTEWEEN Y, ~~K~~ η AND σ :- **(SU-2016)**

Let ABCD represent the front faces of a cube of side L. A tangential force F is applied on its upper face AB and the bottom face DC is fixed.

माना L भुजा के एक घन का अग्र सतह ABCD है। इसके ऊपरी सिरे AB पर एक स्पर्शीय बल F लगाया जाता है जबकि नीचले सिरे DC को स्थिर रखा गया है।

As a result of this force the cube is sheared to A'B'CD through an angle θ. Then

इस बल के परिणाम स्वरूप घन कोण से A'B'CD को विरूपित हो जाता है।



Where the displacement AA' = BB' = ℓ

Shearing stress

$$T = \frac{F}{\text{Area of the upper face of the cube}}$$

$$T = \frac{F}{L^2}$$

Coefficient of rigidity $\eta = T/\theta$

Let α and β be the longitudinal and lateral strains per unit stress respectively. Then extension along diagonal DB due to tencile stress = DB . T. α and extension along diagonal DB due to compression stress along AC = DB. T. β

माना α तथा β प्रति इकाई प्रतिबल पर अनुदैर्ध्य तथा पार्श्वीय विकृति हैं। अतः स्पर्शीय प्रतिबल के कारण विकर्ण DB के तहत वृद्धि होगा = DB . T. α तथा अकुंचन प्रतिबल को कारण विकर्ण DB के तहत वृद्धि होगा AC के अनुदिश = DB. T. β

Total extension along DB

$$= DB.\ T.\ (\alpha + \beta) = L\sqrt{2}\, T(\alpha + \beta)$$

Let us draw a perpenducular BN on DB'. Then increase in the length of diagonal DB is practically equal to N'B'. As α is very small, therefore angle AB'C is nearly 90^0 and angle BB'N = 45^0.

अब DB' पर लम्ब BN खींचा। तब विकर्ण DB की लम्बाई में बढ़त व्यवहारतया N'B' के बराबर होगी। चूँकि α बहुत छोटा है अतएवं कोण AB'C को लगभग 90^0 के बराबर माना जा सकता है। तथा कोण BB'N = 45^0

$$\text{Thus } NB' = BB' \cos 45^0 = \frac{BB'}{\sqrt{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

or $L\sqrt{2}\,T(\alpha+\beta) = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$

or $T\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{1}{2(\alpha+\beta)}$

But, $T\left(\dfrac{L}{\ell}\right) = \dfrac{T}{\left(\ell/L\right)} = \left(\dfrac{T}{\theta}\right) = \eta = \dfrac{1/\alpha}{2(1+\beta/\alpha)} = \dfrac{y}{2(1+\sigma)}$

$$\boxed{\eta = \frac{Y}{2(1+\sigma)}} \quad \text{..........(2)}$$

(III) RELATION BETWEEN Y, K AND ~~H~~ :- η

From Eqn (1), we get

$$(1-2\sigma) = Y/3k$$

and from eqn (2), we gets

$$2 + 2\sigma = {}^{y}\!/_{\eta}$$

Adding the above two equation, we get-

$$3 = \frac{Y}{\eta} + \frac{Y}{3K} \qquad \text{or,} \qquad 3 = Y\left(\frac{3K+\eta}{3K\eta}\right)$$

thus,

$$Y = \frac{9\eta K}{3K+\eta} \quad \text{.........(3)}$$

This may be written as

$$\frac{9}{Y} = \frac{3K+\eta}{\eta K}$$

or ,

$$\boxed{\frac{9}{Y} = \frac{3}{\eta} + \frac{1}{K}} \quad \text{...........(4)}$$

(IV) RELATION BETWEEN K, ~~H~~ AND ~~Σ~~ σ :- η

from equation (1) and (2) we have

$$Y = 3K(1-2\sigma) = 2\eta(1+\sigma)$$

or, $3K(1-2\sigma) = 2\eta(1+\sigma)$

or, $3K - 6K\sigma = 2\eta + 2\eta\sigma$

or, $\sigma(2\eta+6K) = 3K - 2\eta$

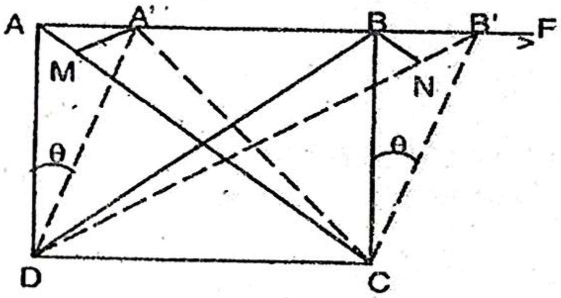
or, $\boxed{\sigma = \dfrac{3k-2\eta}{2\eta+6K}}$ ....(5)

Ques(6) Show that the shearing strain θ is equivalent to the extensional strain on compressive strain and it is equal to the half of the shearing strain?

(2003, 07)

Sol^n : Let a tangential force F is applied to the upper face AB of a cube ABCD of each edge L, with its lower face DC fixed, so that it is sheared through a small angle θ into the position A'B', with its perpendicular diagonals DB and AC extented to DB' and shortened to A'C respectively.

माना L भुजा के एक घन ABCD के उपरी भुजा AB पर स्पर्शीय बल F लगा होता है तथा इसकी निचली भुजा DC को स्थिर रखा जाता है जिससे कि यह कोण θ से स्थिति A'B' के तहत विरूपित हो जाता है जबकि इसके लम्बवत विकर्ण DB तथा AC क्रमशः DB' तक बढ़ जाते तथा A'C तक घट जाते हैं।



The shear being small, Δ AMA' and Δ BNB' may be assumed to be right - angled triangles, so that NB' = BB' cos 45° = BB' / √2

चूँकि विरूपक बहुत छोटा है अतः Δ AMA' तथा Δ BNB' को समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज माना जा सकता है जिससे NB' = BB' cos 45° = BB' / √2

since AB = L, we have DB = DN

$$= \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2}$$

∴ tensile strain along diagonal DB

$$= \frac{NB'}{DB} \frac{BB'}{\sqrt{2}\left(L\sqrt{2}\right)} = \frac{BB'}{2L} = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{BB'}{L} = \theta$$

Similarly, compressive strain along diagonal AC

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AA' \,Cos\, 45}{AC} = \frac{AA'}{\sqrt{2}\left(L\sqrt{2}\right)}$$

$$\frac{AA'}{2L} = \frac{\theta}{2}$$

Thus, the simple shear θ is equal to half a tensile and half a compressive strain at right angle to each other.

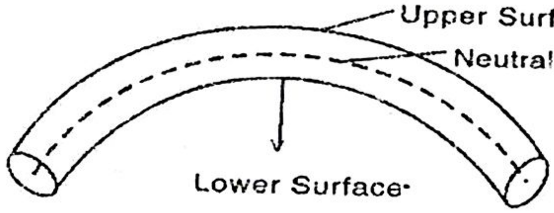
अतः सामान्य विरूपक θ बराबर होता है तनित विकृति के आधे के तथा अकुंचित विकृति के आधे के, जबकि ये एक–दूसरे के लम्बवत है।

Ques(7) Write short notes on Bending Moment ? **(2003, 2011)**

What do you understand by bending moment? Derive to expressionfor a uniform beam. **(2009)**

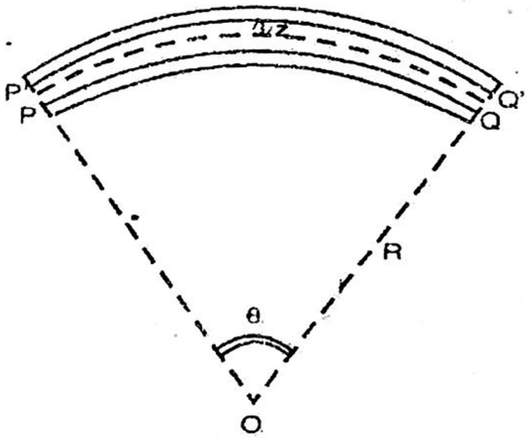
Sol^n A rod or bar of circular or rectangular cross-section, with its length is very much greater than its thickness is called beam. In the bent position the upper surface of the beam becomes convex and the inner surface become concave as shown in the figure.

एक वृत्ताकार या आयताकार परिच्छेद का छड़ या गुटका जिसकी लम्बाई इसकी मोटाई से बहुत ज्यादा होती है बीम कहलाती है। झुकी स्थित में बीम का उपरी सतह उत्तल हो जाता है। तथा आंतरिक सतह अवतल हो जाता है जैसा कि चित्र में चित्रित है।



The inner portion of the beam to be bent into a circular arc. are shown in the figure. Let the filament PQ has acquire the shape of an arc of circle of radius R fig, Then

$$PQ = R\,\theta$$



If P'Q' is the filament at a distance Z from the neutral filament then, we have

$$P'Q' = (R + Z)\,\theta$$

Therefore the increases in the length of the filament is

$$\delta \ell = P'Q' - PQ = (R+Z)\,\theta - R\theta$$

or, $$\delta \ell = Z\theta$$

and the linear strain produced in the filament is

$$= \frac{\delta l}{l} = \frac{Z\theta}{R\theta} = \frac{Z}{R}$$

Thus we can say that the linear strain produced in any filament is proportional to its distance from the neutral axis.

Now the young modulus of the material of the beam is given by

अतः हम कह सकते हैं कि किसी पुंतन्तु में उत्पन्न रेखीय विकृति अनुक्रमानुपाती होता है इसकी सामान्य अक्ष से दूरी के।

$$Y = \frac{\text{Tensile stress}}{\text{Linear stress}} \quad \text{or} \quad Y = \frac{\text{Tensile stress}}{\left(Z/R\right)}$$

or, tensile stress $= \frac{YZ}{R}$

Now consider an area δA at a distance z from the neutral surface. Therefore the forces on the area

δA = stress × Area

$= \frac{YZ}{R} \delta A$

and moment of this force about neutral filament

$$= \frac{YZ}{R} \delta A. Z = \frac{YZ^2}{R} \delta A$$

Since the moment of all such force about the neutral filament is same direction therefore the total moment of forces acting on all filament of Beam

$$= \Sigma \frac{YZ^2 \delta A}{R}$$

It is called the bending moment of the beam. The quantity $\Sigma \delta AZ^2$ is called the geometrical moment of inertia of the beam and is denoted by the symbol Ig.

इसे बीम का अभिनत आघूर्ण कहते हैं। माना $\Sigma \delta AZ^2$ को बीम का ज्यामीतिय जड़त्व आघूर्ण कहते हैं तथा इसे प्रतीक से Ig प्रकट करते हैं।

Thus bending moment of the beam

$= \frac{Y}{R} . Ig$

The q uantity YIg is called the flexural rigidity of the beam.

Thus

Bending Moment of Beam

= Flexural Rigidity / R

Ques(8) Differentiale between angle of twist and angel of shear and thus find an expression for the couple required to twist a uniform cylinder of length ℓ and radius r. (GKP-2001,2014)(SU-2016)

OR Explain the difference between angle of twist and angle of stear Derive and expression for the twisting couple of an Uniform solid cylinder. (2008)

OR What do you understand by angle of twist and angle of shear? Derive the expression for tartional rigidity of a cure clamped at its one end and twisted at the other end. (2010)

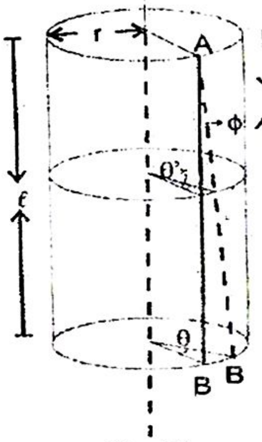


Fig:(1)

Sol^n Let us consider a cylindrical rod or wire of length ℓ and radius r clamped at the upper end and twisted by a couple at the lower free end. By doing so, each circular cross-section of the rod rotates through an angle. This angle is called the angle of twist and is proportional to the distance of cross-section from the clamped end. If the angle of twist at the free end is θ, then

माना एक बेलनाकार छड़ या तार जिसकी लम्बाई ℓ तथा त्रिज्या r

है उपरी सिरे पर बंधा है तथा इसके निचले सिरे को एक युग्म के द्वारा ऐंठा जाता है। ऐसा करने पर छड़ का प्रत्येक वृत्ताकार परिच्छेद एक कोण से घूम जाता है। यह कोण ऐंठन कोण कहलाता है तथा बंधे सिरे से परिच्छेद की दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है। यदि स्वतंत्र सिरे पर ऐंठन कोण θ हो तो

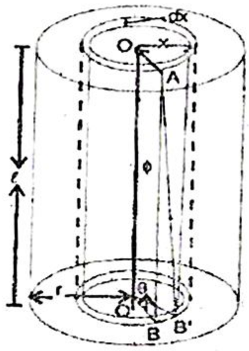
$$r\theta = \ell\phi = BB' \quad ....(1)$$

Where ϕ is the angle of shear.

In any section normal to the axis at a distance, say ℓ' from the fixed end, let the angle of twist be θ' then

$$r\theta^1 = \ell\phi' \quad ....(2)$$

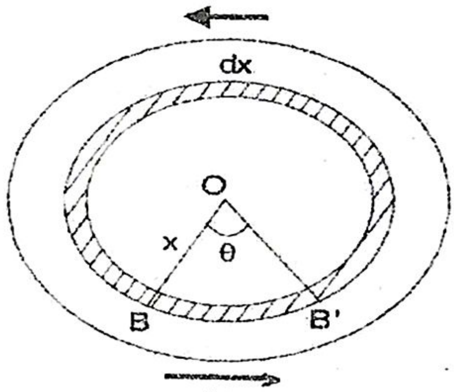
from eqn (1) and (2) we see that as $l' < l$, hence $\theta' < \theta$.



(a) Fig:(2)

TWISTING COUPLE ON A CYLINDRICAL ROD :-

Let us consider a cylindrical rod of length ℓ and radius r. The upper end of the rod is kept fixed and a twisting couple is applied at its lower end in a plane perpendicular to its length.



(b) Fig:(2)

Imagine the cylinder to consist a large number of thin coaxial cylinderical shells and consider one such shell of radius r, thickness dx and length ℓ. The angle ϕ is the angle of shear. To understand this, let thiscylindrical shell were cut along AB before twisting and flattened out, it will form a rectangular plate ABCD, but after twisting it acquires the shape of a parallelogram AB'C'D. If θ is the angle of twist at the lower end of the rod, then

माना एक बेलनाकार छड़ जिसकी लम्बाई ℓ तथा त्रिज्या r है। छड़ का उपरी सिरा स्थिर है तथा इसके निचले सिरे पर एक ऐंठन युग्म लगाया जाता है जो इसके लम्बाई के लम्बवत् तल में है।

माना बेलन कई पतले सम अक्षीय बेलनाकार सेलों का बना है तथा माना एक ऐसा सेल जिसकी त्रिज्या r, मोटाई dx तथा लम्बाई ℓ है। कोण ϕ विरूपक कोण है। इसे समझने के लिए माना ऐंठन के पहले इस पतले सेल को AB के अनुदिश काट लिया जाता है जिससे यह एक आयताकार प्लेट

ABCD का निर्माण करता है लेकिन ऐंठन के बाद यह एक समान्तर चतुर्भुज AB'C'D का आकार ग्रहण करता है। यदि निचले सिरे पर ऐंठन कोण θ हो, तो

$$BB' = AB.\phi = OB.\theta \text{ or } l\phi = x\theta$$

or, $$\phi = \frac{x\theta}{\ell}$$

Let F be the tangential force acting on the base of this thin cylindrical shell producing a shear. Then

$$\text{Tangential stress} = \frac{F}{\text{Area of the base of the shell}}$$

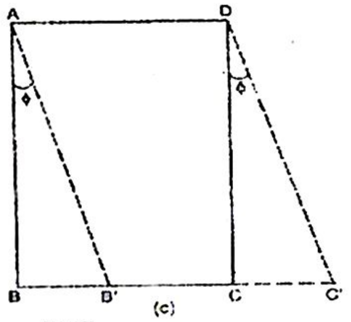


Fig:(2)

But, Area of the base of the shell

$$= \text{Circumference} \times \text{thickness}$$
$$= 2\pi x.dx$$

$$\therefore \quad \text{Tangential stress} = \frac{F}{2\pi x\,.\,dx}$$

If η is the modulus of rigidity of the material of the rod, then

$$\eta = \frac{\text{Tangential stress}}{\text{shear}}$$

or, $$\eta = \frac{F}{2\pi x\,.\,dx\,.\,\varphi} = \frac{F}{2\pi x.dx} \cdot \frac{l}{x\theta}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{2\pi\eta\theta}{l}\,.\,x^2\,dx$$

The moment of this force about the axis of the rod

$$= \frac{2\pi\eta\theta\,.\,x^2\,dx\,.\,x}{l} = \frac{2\pi\eta\theta}{l}\,.\,x^3\,dx$$

This is equal to the couple required to twist the shell of radius x and thickness dx through an angle θ.

यह उस युग्म के बराबर होता है जो x त्रिज्या तथा मोटाई dx के सेल θ कोण से ऐंठन करने के लिए प्रयुक्त होता है।

Intergrating the above expression between the limits x = 0 and x = r, we get the total twisting couple i.e.

Twisting couple on the rod =

$$\tau = \int_0^r \frac{2\pi\eta\theta}{l}\,x^3\,dx$$

$$\tau = \frac{2\pi\eta\theta}{l} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{\pi\eta r^4 . \theta}{2l}$$

Thus the twisting couple per unit twist

$$C = \frac{\tau}{\theta} = \frac{\pi \eta R^4}{2l}$$

Here C is known as torsional rigidity of the cylinder.

Ques(9) Find the poisson's ratio of a material whose volume is not changeable at anypressure? (2003)

Sol^n The relation between Y, K and σ is

$$\frac{Y}{3K} = 1 - 2\sigma$$

For, a hypothetical substance, if the Poisson's ratio

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad \text{then}$$

$$\frac{Y}{3K} = 0$$

Since $Y \neq 0$, therefore

$$K = \infty$$

An infinite value of bulk modulus means that the volume of the substance cannot be changed by pressure or, it is in compressible.

अतः आयतन गुणांक की अनन्त मान का मतलब यह है कि दाब के द्वारा पदार्थ का आयतन बदला नहीं जा सकता अर्थात् असंम्पीड्य बल है।

Ques(10) Show that a hollow rod is better shaft than a solid one of the same mass? (GKP-2001,2003,2007)(SU-2016)

Sol^n : The torque required to twist a solid cylinderical rod of length ℓ, radius r (of a material of coefficient of rigidity η) through an angle ϕ radian is

एक ठोस बेलनाकार छड़ जिसकी लम्बाई ℓ, त्रिज्या r (पदार्थ की दृढ़ता गुणांक η है) को कोण पर ऐंठन करने के लिए आवश्यक बल आघुर्ण होगा

$$\tau = \frac{\pi\eta r^4}{2l}\phi = \frac{\pi\eta r^2 (r^2)}{2l}\phi \qquad ....(1)$$

If the rod is hollow with internal and external radii r_1 and r_2 respectively, the tarq ue, required to twist it though the same angle of ϕ radian will be

यदि छड़ खोखला है जिसकी आंतरिक तथा बाह्य त्रिज्यायें क्रमशः r_1 व r_2 हैं तो इसको समान कोण पर ऐंठन करने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण होगा।

$$\tau' = \frac{\pi\eta\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{2\ell}\phi$$

$$\tau = \frac{\pi\eta(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)}{2l}\phi \qquad ....(2)$$

The masses (volume x density) and lengths of the hollow and solid rod are equal. Thus

$$\pi (r_2^2 - r_1^2) \rho \ell = \pi r^2 \rho \ell$$

or, $(r_2^2 - r_1^2) = r^2$

Substituting r^2 for $(r_2^2 - r_1^2)$ in eqn (2) and comparing it with eqn (1), we get

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{r_2^2+r_1^2}{r^2} = \frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2} \quad ....(4)$$

$$\text{or,} \quad \frac{\tau'}{\tau} > 1 \quad \text{or,} \quad \tau' > \tau$$

Thus the tarque required to twist a hollow cylinder is greater than the tarque to twist a solid cylinder of the same mass, length and material through the same angle. Hence a greater amount of energy will be stored in the hollow cylinder shaft than solid . For the same reason, the hollow cylinder will be stronger than a solid one. Hence a hollow rod is better shaft than a solid one.

अतः खोखले बेलन को ऐंठन करने के लिए आवश्यक बल आघुर्ण समान द्रव्यमान का लम्बाई तथा पदार्थ का ऐंठन करने के लिए आवश्यक बल आघुर्ण से ज्यादा होगा। अतः खोखले बेलन छड़ में ज्यादा उर्जा एकत्रित होगी ठोस सिलेंडर छड़ की अपेक्षा इसी कारणवश छड़ जो कि खोखले बेलन के रूप में होगा ज्यादा मजबूत होगा ठोस बेलन के सापेक्ष। अतः खोखला बेलन ठोस बेलन के सापेक्ष अच्छा छड़ है।

Ques(11) Explain why the steel girders and rail are made with their section in the form of capital letter I. (2000)

Sol^n Girders standing on pillars at their ends support load, so that the girder suffers bending. Its middle part is depressed and the neutral surface lying in the middle of the girder experiences no strain. The filament in the lower part of the girders suffer extension while those in the upper part suffer contraction. These extensions and contractions increase towards the outermost filaments. In comparison to inner part of the girder, outer parts are strained to a much greater extent. Therefore, the top and lower surface of the girder should be stronger than the inner parts. Thus the inner parts are made of small width while the upper and lower sufraces (cross-section of the girder) are give I shape. In this way, without affecting the strength of the girder, most of the material is saved. The same is the case with rails.

गिर्डर्स (धातु के लम्बे बीम) जो कि खम्मों पर खड़े रहते है अपने सिरों पर भार से सहारा दिये जाते हैं जिससे गिर्डर्स अवनत महसूस करते हैं। इनके मध्य भाग झुके होते हैं तथा गिर्डर्स के मध्म में स्थित सामान्य सतह कोई विकृति अनुभव नहीं करते हैं। गिर्डर्स के निलचले भाग में पुतन्तु वृद्धि अनुभव करते हैं जबकि उपर भाग साफ्ट संकुचन अनुभव करते हैं। उनके वृद्धि तथा कान्ट्रैक्शन वाह्यतम पुंतन्तु की तरफ बढ़ते हैं। अतः गिर्डर्स के उपरी तथा निचले सतह ज्यादा मजबूत होते हैं आंतरिक सतह के तुलना में अतः आंतरिक भाग छोटी चौड़ाई के बने होते हैं। जबकि उपरी और नीचले भाग (गिर्डर्स के परिच्छेदन) I आकार के होते हैं। इस प्रकार बिना गिर्डर्स की मजबूती को प्रभावित किये अनेक पदार्थ सुरक्षित हो जाते हैं। यही रेलों के केस में भी होता है।

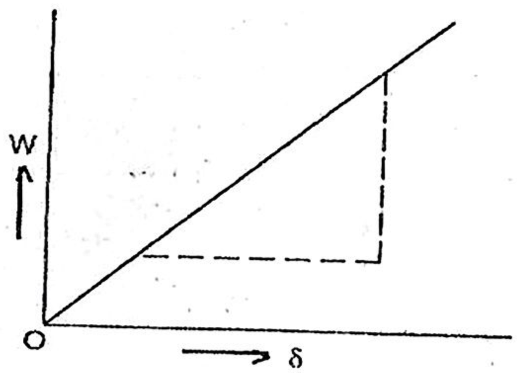
Ques (12) What is the nature of curve when the mean depression δ in a bending of beam experiment is plotted against corresponding load. W. Explain with the help of relevant formula. (2002)

Sol^n In the bending of beam experiment the Mean depression δ is given by,

$$\delta = \frac{L}{4\,bd^3}\left(\frac{W}{\delta}\right)$$

If a graph plotted between the mean depression δ and the corresponding load W then a curve as shown in the following figure is obtained. The nature of curve is straight line and the slope of this line gives W / δ.

यदि एक ग्राफ माध्य झुकाव तथा समतुल्य भार के बीच प्रदर्शित किया जाय तो चित्र में चित्रित आकार का वक्र प्राप्त होगा। वक्र की प्रकृति सीधी रेखा है और इस रेखा का ढ़ाल होगा W / δ.



Ques (13) A beam of a square cross-section is stiffer than one of circular cross -section of the same material, mass and length. (2000)

OR

For the same or cross-Sectional area show that a beam of square section is stiffer than the one of circular of the same material? (2005)

Sol^n : Let a beam is clamped at one end and loaded at the other free end. Depression produced at the fre e end is

$$\delta = \frac{Wl^3}{3YI}$$

for a rectangular beam

$$I = bd^3/12$$

Where b and d are the breadth and thickness of the section. If the section of the beam is square then b = d. Therefore,

जहाँ b तथा d क्रमशः परिच्छेद की चौड़ाई तथा मोटाई हैं। यदि बीम का परिच्छेद वर्गाकार हो तो b = d, अतएवं

$$I = \frac{b^4}{12}$$

Therefore depression δ_1 for this beam is given as

$$\delta_1 = \frac{Wl^3}{3Yb^4/12} = \frac{4Wl^3}{Yb^4} \quad ....(1)$$

for a beam of circular section,

$$I = \pi r^4/4$$

Therefore δ_2 for circular beam is given as

$$\delta_2 = \frac{Wl^3}{3Y\pi r^4/4} = \frac{4Wl^3}{3Y\pi r^4} \quad ....(2)$$

From eqn (1) and (2), we get

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{4Wl^3}{Yb^4} \times \frac{3\pi r^4}{4Wl^3} = \frac{3\pi r^4}{b^4}$$

But the cross-section of the two beams are equal therefore

$b^2 = \pi r^2$ or $b^4 = \pi^2 r^4$

Thus,

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{3\pi r^4}{\pi r^4} = \frac{3}{\pi}$$

As $3/\pi < 1$, therefore $\delta_1 < \delta_2$

That is, the depression at the loaded end of a square beam is more in comparison to circular beam. So a square beam is stiffer than a circular beam.

अर्थात् वर्गाकार बीम के भार वाले सिरे पर झुकाव वृत्ताकार बीम के तुलना में ज्यादा होता है। अतः वर्गाकार बीम वृत्ताकार बीम की तुलना में मजबूत होता है।

Ques(15). Define the relations between elastic constants γ, κ, η and σ and if the value of Poisson ratio is 1/2, what does mean ? (2011)

Sol^n See question no. (5).

We know that

$$\frac{Y}{3k} = 1 - 2\sigma$$

If poison's ratio $\sigma = 1/2$, then $\frac{Y}{3k} = 0$

Since $y \neq 0$ therefore $\kappa = \infty$

An infinite value of bulk mokulus means that the volume of the substance can not be changed by pressure or it is incompressible.

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का अनन्त मान का अर्थ है कि दाब द्वारा पदार्थ का आयतन नहीं बदला जा सकता है अर्थात असंपीड्य होता है।

Ques(16).Define modules of rigidty. Descube and explain how Maxwell's needle can be used to determine dynamically the modules of rigidity of the material of the wire. Compare this method with the statistical method. (2013)

Sol^n : <u>MODULUS OF RIGIDITY</u> :-

दृढ़ता गुणांक :–

The ratio of the shearing stren to shearing strair is called modules of rigidity and is denoted by letter η. The shear strain is measured in term of angle. Thus if S is the shearing stress and Q is shear strain, then

विरूपक प्रतिबल तथा विरूपक विकृति के अनुपात को दृढ़ता गुणांक कहते हैं तथा इसे η प्रदर्शित करते है। विरूपण विकृति को कोण में नापते हैं। इस प्रकार यदि विरूपक S प्रतिबल (स्पर्श रेखीय प्रतिबल) हो तथा Q अपरूक (विरूपक) विकृति हो,

$$\eta = \frac{S}{\theta}$$

Its unit is same as that of stress.

इसकी मात्रक, प्रतिबल का मात्रक होता है।

The method, using Maxwell's needle for the determination of modules of rigidity of the material of a wire, is a dynamical method. it consist of a speally designed body of variable moment of inertia suspended by a long and thin vertical wire, whose upper end is clamped rigidigy. The body is made of a long hollow brass tobe of length L in which four small brass cylinders are fitted, two hollow and two solids, each of length exactly L /4.

मैक्सवेल निडिंल की प्रयोग द्वारा किसी तार की पदार्थ दृढ़ता गुणांक ज्ञात करना एक गत्यात्मक विधि है। इसमें एक विशेष प्रकार से तैयार किया गया पिण्ड होता है जिसका जड़त्व आघूर्ण बदला जा सकता है, जिसको (पिण्ड को) एक पतले तथा लम्बे उर्ध्वाधर तार द्वारा निलम्बित किया जाता है, जिसका ऊपरी सिरा दृढ़ रूप से कसा होता है। पिण्ड में L लम्बाई की एक लम्बा खोखला ब्रास का बेलन (नली) होता है जिसमें चार छोटे ब्रास के बेलन होते हैं जिसमें से दो खोखले होते हैं तथा दो ठोस बेलन होते हैं तथा प्रत्येक की लम्बाई L/4 होती है।

When the body is slightly rotated in the horizontal plane and releasesd, it performs tortional osccilations about the wire as axis. Determining time periods of thes oscillations, we can find the modulus of rigidity of the material of the wire.

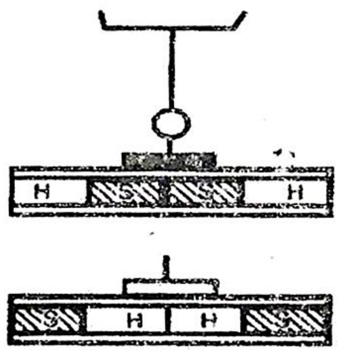
जब पिण्ड को क्षैतिज तल में थोड़ा घुमाया जाता है तो पिण्ड टारसिनल दोलन, तार के परितः करने लगता है। इस दोलन का दोलन काल ज्ञात कर हम तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक ज्ञात कर सकते हैं।

THEORY AND PROCUDURE :-

सिद्धांत व क्रियाविधि :–

First the solid cylinders are placed in the inner positions and the hollow cylinder in the outer possition as shows in the following figure.

सर्वप्रथम ठोस बेलन को अन्दर की स्थिति में तथा खोखले बेलन का बाहर जैसा कि चित्र में दिखाया गया है रखते हैं।



The system is allowed to perform tortional oscillation. Let T_1 be the time period of vibration, then

अब निकाय को टारसिनल दोलन के लिए प्रेरित करते हैं। माना T_1 दोलन का दोलन काल है, तो

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{C}} \qquad \text{..............(1)}$$

Where I_1 is the moment of inertia of the suspended system about the wire and C is the tortional eovple per unit twist of the wire.

जहाँ I_1 निलम्बित निकाय की जड़त्व आघुर्ण अक्ष के रूप में तार के परितः है तथा C तार की ऐंठन युग्म प्रति इकाई घुमाव है।

Now the position of hollow and solid cylinders are interchanged. Now if I_2 be the moment of inertia of the system about the wire, then the time period, is given by

अब खोखले बेलन तथा ठोस बेलन की स्थिति को बदल दिया जाता है। अब यदि तार के परितः निकाय की जड़त्व आघुर्ण I_2 हो तो आवर्त काल होगा –

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{C}} \qquad \text{..............(2)}$$

Now, from eq^n (1) and (2) we get

$$C = \frac{4\pi^2 (I_2 - I_1)}{T_2^2 - T_1^2}$$

But we know that $C = \frac{\pi\eta r^4}{2\ell}$. Where ℓ and r are the length and radius of the speeimen wire respectively. Therefore

$$\frac{\pi\eta r^4}{2\ell} = \frac{4\pi^2 (I_2 - I_1)}{T_2^2 - T_1^2}$$

$$\text{or,} \quad \eta = \frac{2\pi\ell(I_2 - I_1)}{\left(T_2^2 - T_1^2\right).r^4} \qquad \text{....................(3)}$$

Let I_0, I' and I" be the moment of inertia of the hollow brass case, solid and hollow cylinders respectively about the axis passing through their centres of gravety and perpendicular to their lengths.

माना I_0, I' तथा I" क्रमशः खोखले नली ठोस बेलन तथा खोखले बेलन का उनके गुरूत्व केन्द्र से गुजरने वाले तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघुर्ण है।

As the length of each cylinder is L/4, the moment of inertia of the needle I_1 about the wire as axis, when the hollow cylinders are placed near the ends of the hollow brass tube, is given by

चूँकि प्रत्येक बेलन की लम्बाई L/4 है, अतः निडिल का तार के परितः जड़त्व आघुर्ण (I_1) जबकि खोखले बेलन को बाहर जिस पर रखा गया है, होगा

$$I_1 = I_0 + \left[I' + m_1\left(\frac{L}{4.2}\right)^2\right] + 2\left[I'' + m_2\left(\frac{3L}{4.2}\right)^2\right]$$

$$\text{or,} \quad I_1 = I_0 + 2I' + 2I'' + 2m_1\left(\frac{L}{8}\right)^2 + 2m_2\left(\frac{3L}{8}\right)^2 \qquad \text{...........(4)}$$

Where m_1 is the mass of each solid cylinder and m_2 that for each hollow axis.

जहाँ m_1 प्रत्येक ठोस बेलन का द्रव्यमान है तथा m_2 प्रत्येक खोखले बेलन का द्रव्यमान है।

Similarly, moment of inertia of the system I_2, when the solids cylinders are at ends, about the wire as axis is

इसी प्रकार निकाय की तार के परितः जड़त्व आघुर्ण I_2 जब कि दोंनों ठोस गोले को सिरों पर रखा गया है, होगा

$$I_2 = I_0 + 2I' + 2I'' + 2m_1\left(\frac{3L}{8}\right)^2 + 2m_2\left(\frac{L}{8}\right)^2 \qquad \text{..........(5)}$$

Substituting eq^n (5) from eq^n (4), we get

$$I_2 - I_1 = (m_1 - m_2)L^2/4 \qquad \text{..........(6)}$$

Substituting the value of $(I_2 - I_1)$ from eq^n (6), to eq^n (3), then we get

$$\boxed{\eta = \frac{2\pi(m_1 - m_2)L^2\ell}{\left(T_2^2 - T_1^2\right)r^4}} \qquad \text{..................(7)}$$

Where T_1 and T_2 are the time period in the two cases are calculated with the help of telescope and scale arrangement. Substituting the values of various quantity, in eq^n (7), we can calculate the modulus of rigidity of the material of the wire.

जहाँ T_1 तथा T_2 उपर्युक्त वर्णित दो अवस्थाओं में निकाय की आवर्तकाल है जिसे दूरदर्शी तथा स्केल व्यवस्था द्वारा ज्ञात किया जाता है। विभिन्न राशियों का मान समी० (7) में प्रतिस्थापित करने पर हम तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक की गणना कर सकते हैं। टारसिन दोलक के अपेक्षा हल्के दो लाभ हैं –

If has two advantage over tortional pendulum (statestical method)

(i). In maxwell's needle, the load suspended at the end of the wire remains the same, since only the positions of solid and hollow sylinder interehanged. Thus the couple C per unit twist due to tortional reaction remains constant.

मैक्सवेल निड्लि में तार के सिरे द्वारा निलम्बित भार सदैव समान होता है क्योंकि ठोस तथा खोखले बेलन के स्थान को केवल बदला जाता है। अतः युग्म C प्रति इकाई घुमाव हमेशा नियत रहता है।

(ii). Here the calculation of $(I_1 - I_2)$ reduces to the determination of the difference between the masses of the solid and hollow cylinders and the length of the hollow tube can be measured accurately and easily.

यहाँ पर $(I_1 - I_2)$ की गणना के स्थान पर हम ठोस तथा खोखले बेलन के द्रव्यमानों में अन्तर तथा खोखले नलों का लम्बाई ज्ञात करते हैं। जिसे हम अधिक शुद्ध तथा आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

Ques(17). Which coefficient of elasticity is important when a cylindrical were is twisted? Derive an expression for the couple to produce unit angular twist in a cylindrical wire of radius r and length ℓ. (2004)

Sol^n For twisting of a cylindrical wire the most important coefficient of elasticity is modulus of rigidity.

किसी बेलनाकार तार के ऐंठन में सबसे अधिक महत्वपूर्ण प्रत्यास्था गुणांक, दृढ़ता गुणांक है।

For remaining part of this question see Q. No. (8).

Ques(18)What is a Torsional Pendulum? write an expression for its time period.

Sol^n : A heavy body like a cylinder or a disc, fastened at its- mid-point to a fairly long and thin wire suspended from a rigid support constitutes a torsional pendulum. It is so calledbecause if the cylinder or the disc be turned in its our plane in twist the were a little and then released it executes trational vibration or oscillateions about the wire as axis.

बेलन या डिस्क जैसी भारी पिण्ड जब एक पर्याप्त लम्बी तथा पतली तार से इसके मध्य बिन्दु से बांध कर दृढ़ आधार से लटकाया जाता है तो व्यवस्था को टारिसनल पेण्डुलम कहते हैं क्योंकि जब बेलन या डिस्क को इसके तल पर घुमाया जाता हैं तो तार में ऐंठन उत्पन्न हो जाती हैं तथा छोड़ने पर यह टारिसनल कम्पन या दोलन, तार के परितः करने लगता हैं।

Thus, if the disc be turned thruogh an angle θ, say the suspension wire two gets twisted through the same angle o and the give rise to a restoring tortionalcoubple(o in its tending to pring it bock into its original condition. Here C is the tortional coupleper unittwist of the wire, equal to $\pi\eta R^4 / 2L$. Where η is the modulus of rigidityof the material.

अतः यदि डिस्क को थीटा कोण पर घुमाया जाता हैं जिससे कि तार में भी थीटा कोण का ऐंठन उत्पन्न होता हैं तो इसके कारण इस पर प्रत्यानयन टारिसनल युग्म बथीटा कार्य करता हैं जो कि इसे सामान्य अवस्था में लाने का प्रयास करता हैं। यहाँ ब तार की टॉरिसनल युग्म प्रति एकांक ऐंठन हैं। जो कि (नही आता) जहाँ पदल दृढ़ प्रत्यास्थता गुणांक हैं।

if I be the moment of inertia of thedisc aboutan axis passingthrough itscenter, and $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, itsangular acceleration,thecouple acting on its isalsoequal to $I.\frac{d^2\theta}{dt^2}$. We, thereforehave $I.\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$. Here negative sign indicating that the restoring couple ortargue is oppositely directed to the angular displacement.

यदि प्रथम डिस्क का इसके केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आधुर्ण हैं तथा इसका कोणीय त्वरण हैं तो डिस्क पर कार्यरत युग्म नहीं आता होगा। अतः $I.\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$ यहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता हैं कि प्रत्यानयन युग्म अर्थात बल आधुर्ण, कोणीय विस्थापन के विपरीत दिशा में कार्यरत हैं।

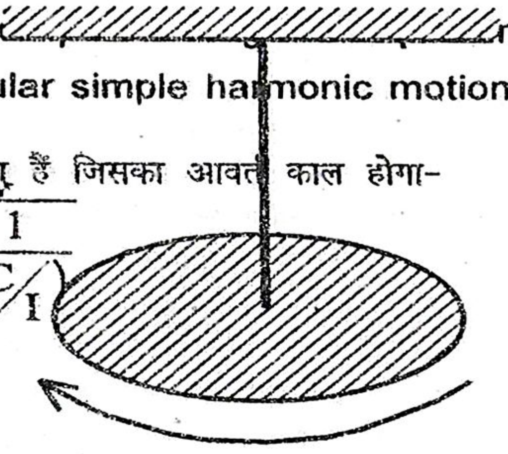
So that
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{C}{I}\right)\theta = \mu\theta$$

Where $\frac{C}{I} = \mu$ is the accelerati ment

The disc thus executes an angular simple harmonic motion and its time-period is given by

इस प्रकार डिस्क एक कोणीय सरल आवर्त गति करता हैं जिसका आवर्त काल होगा-

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{(C/I)}}$$



or
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}}$$

(Torsion Pendulum)

It may be noted that no approximationswhatever has been used in arriving at this relation forT, unlike in the case of asimple or a compound pendulm. The timeperiod of a torsionalpendulum therefore remainsunaffected even if the amplitude be large provided, of course the elastic limt of the suspension wireisnot exceeded.

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता हैं कि प्रत्यानयन युग्म अर्थात बल आधुर्ण, कोणीय विस्थापन के विपरीत दिशा में कार्यरत हैं।

इस प्रकार डिस्क एक कोणीय सरल आवर्त गति करता हैं जिसका आवर्त काल होगा-

यह ध्यान देने योग्य हैं कि किसी भी प्रकार की परिकल्पना का उपयोग T को प्राप्त करने में नहीं किया गया हैं। अतः

टॉरिसनल पेण्डुलम का आवर्त काल, अधिक अयाम पर भी अप्रभावित होता हैं, यदि निलंबन तार प्रत्यास्थत सीमा पार न करें।

Ques(19)Describe the method of bending of beams to determine the Young's Modulus of the material of the beam. (2006)

Sol^n : The experimental setup forthe determination of Young modulus are shown in the following figure.

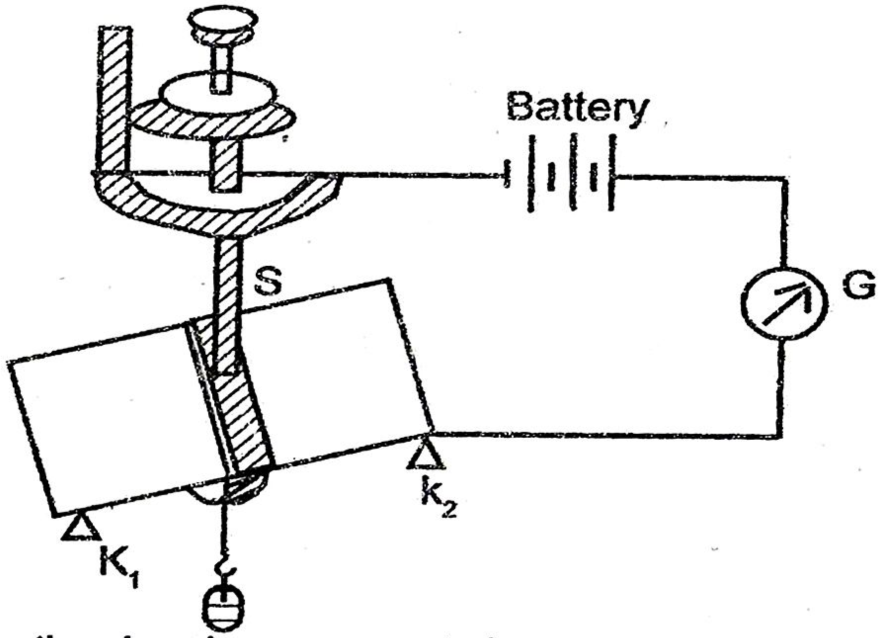
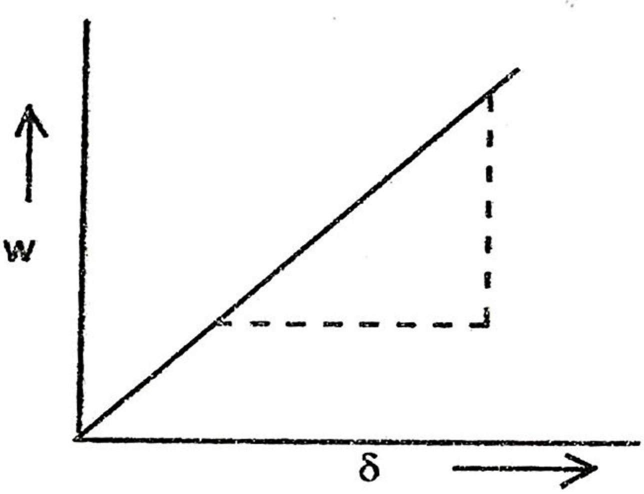


Figure shows the given beam supported symmetrically on two harizontal knifeedges K_1 and K_2. A hanger with a hook is placed in the middle of thebeam. The load is applid by suspending weights from the hook. The depression produced in the beam is meassured by a spherometer. It is placed in series with a batteryand a galvanometer G. When thecentral leg of the spherometer ismade just totouch the hanger the electrical circuit is completed and the galvanometer shows adeflection.In this position, the reading of the spherometer istaken. Now the beam is loaded in equal step sand each time the screw is made to touch the hangerand the reading is taken. The same observations are taken with load decreasing. A graph is plotted between the mean depression δ and the corresponding load W. It is a straight line.

किसी पदार्थ की यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करने के लिए प्रयोगात्मक चित्र में दिखाया गया हैं। चित्रानुसार दिये गये बीम को दो क्षैतिज नुकिले किनारो k_1 तथा k_2 पर व्यवस्थित किया जाता हैं। हुक के साथ एक हैंगर बीम के मध्य में लगा दिया जाता हैं इस हुक पर भार लटकाया जाता हैं स्फेरोमीटर की सहायता से बीम में उत्पन्न झुकाव को मापा जाता हैं। इसे बैटरी तथा गैल्वनोमीटर G के साथ श्रेणी में रखा जाता हैं। जैसे ही स्फेरोमीटर का केन्द्रीय लेग को हैंगर के सम्पर्क में लाते है विघुत परिपथ पूर्ण हो जाता हैं जिससे कि गैल्वेनोमीटर की सूई में विस्थापन होता हैं। इस अवस्था में स्फेरोमीटर का पाठयांक लेते हैं अब बीम को भिन्न-भिन्न भारों को बराबर स्टेप पर लटकाते हैं तथा प्रत्येक बार स्क्रू को हैंगर से सम्पर्क में लाकर पाठयांक लेते हैं। इस प्रकार का प्रेक्षण भार को कम करके भी W के बीच एक ग्राफ खीचा गया हैं जो कि एक सीधी रेखा हैं। इस रेखा का स्लोप $\left(\frac{W}{\delta}\right)$ होगा।



The slope of this line gives $\left(\frac{W}{\delta}\right)$.

Thus

$$Y = \frac{\ell^3}{4\ b\ d^3}\left(\frac{W}{\delta}\right)$$

The distance ℓ between the knife edges K_1 and K_2 is meassured directlybymeter scale. The width b and the thickness d of the beam are measured by vernier callipers and screw gauge respectively d is a smaller quantity and occours in the third power is the formula so it is measured very accurately at several places. The mean valve of d is taken.

Substituting the valves of W/δ, ℓ, b and d in above equation, we can calculate the valve of Y.

k_1तथा k_2 के बीच की दूरी ℓ को सीधे मीटर स्केल से नापते है चौड़ाई b तथा मोटाई d को वर्नियर कैलीपर्स तथा स्क्रूगेज से नापते हैं। चुँकि d बहुत छोटी राशि हैं तथा इसका तीसरा घात का उपयोग हैं अतः इसे कई स्थानों पर ठीक से नापना चाहिए तथा d का माध्य मांन निकलना चाहिए।

उपयुक्त समीकरण को W/δ, ℓ, b एंव d का मान रखकर Y का मान निकाला जा सकता हैं।

Q.20 Define the term stress, Poisson's ratio and elastic limit. (2007)

Ans. **(i) Stress :** External deforming force exerted on a body develops internal forces opposing the external forces. The magnitude of the internal forces per unit area of the section is called stress. In equilibrium, the iternal forces are equal and opposite to the external forces. Therefore, stress is measured by the external forces per unit area of the section. Its dimension are $ML^{-1}T^{-2}$ and units are newton/meter² or dyne/cm². Thus $Stress = \frac{Force}{Area}$

(i) प्रतिबलः— बाहय विकृति बल, जब एक पिण्ड पर लगाया जाता है, वाहयबल का विरोध करने के लिए आन्तरिक बल उत्पन्न होता है। वर्ग (खण्ड) के प्रति इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले आन्तरिक बल के परिणाम को प्रतिबल कहते है। सन्तुलन की अवस्था में, आन्तरिक बल बराबर और विपरीत बाहयतः बल के बराबर होता है। अतः प्रंतिबल का मापन किसी वर्ग (खण्ड) के प्रति इकाई क्षे0 के बाहय बल से किया जाता है। इसकी बीमा $ML^{-1}T^{-2}$ तथा मात्रक न्यूटन/मी0² या डाइन/सेमी² होती है। अतः

प्रतिबल = बल/क्षे0

(ii) Poisson Ratio : The ratio of charge in dimension to the initial dimension, perpendicular to the direction of forces is called lateral strain. Within elastic limit, the lateral strain is proportional to longitudinal strain i.e. the ratio of lateral strain and longitudinal strain is constant for the material of a body. This constant is known as Poisson's ratio.

If β and α are the lateral and longitudianl strain respectively, then

Poisson's ratio $\sigma = \beta / \alpha$

(ii) पायजन का अनुपातः— विमा मे बदलाव का प्रारम्भिक विमा से अनुपात जो बल की दिशा के लम्बवत होता है, पार्श्व विकृति कहलाता है। प्रत्यास्थता सीमा के भीतर पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति के समानुपाती होता है। अर्थात पार्श्व तथा अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात पिण्ड के पदार्थो के लिए नियत होता है। इस नियतांक को पायजन का नियतांक कहते है।

यदि β और α क्रमशः पार्श्व और अनुदैर्ध्य विकृति हो तो पायजन का अनुपात

$\sigma = \beta / \alpha$. C

(iii) Elastic Limit : In solid, when stress gradually increases, strain also increases (Hookes law) until a point is reached at which the linear relationship between these two just ceases. This value of stress for which. Hooke's law just ceases is called the elastic limit of the body. The body thus recovers its original state after the removal of the stress within this limit but fails to do so when this limit is exceeded.

(iii) प्रत्यास्थता सीमा :– ठोस में, जब प्रतिबल को क्रमशः बढाते है तब विकृति भी बढ़ता है। (हुक का नियम) जब तक एक विन्दु पर पहुचने पर इन दोनो का रेखीय सम्बन्ध [illegible] लगभग समाप्त हो जाय। प्रतिबल के उस मान को जिस पर हुक का नियम, लगभग समाप्त हो जाय पिण्ड प्रत्यास्थता सीमा कहलाता है। इस प्रकार, इस सीमा के अन्दर प्रतिबल को हटाने पर पिण्ड प्रारम्भिक स्थिति को प्राप्त कर लेता है लेकिन जब यह सीमा बढने लगती है तब ऐसा करने में असमर्थ हो जाता है।

Q.21 Show that the potential energy per uit volume of a strained wire is $\frac{1}{2} stress \times strain$. **(2007,2013)**

Soln : Suppose a wire of lengh l and area of cross-section A is stretched throught a distace x by applying a force F along its length. Then

माना एक तार जिसकी लम्बाई ℓ तथा परिच्छेद–क्षेत्रफल A हो तार के अनुदिश बल F द्वारा x दूरी तक खीचा जाता है।

Stress = F/A and Strain = x/ℓ

Therefore, Young's modulus of its material is

$$Y = \frac{\text{stress}}{\text{Strain}} = \frac{F/A}{x/\ell}$$

Hence, the force F required to stretch it through x is

$$F = \left(\frac{YA}{\ell}\right)x$$

If the wire is now stretchedfurther by a small distance dx, then the work done will be

$$dw = F.dx = \left(\frac{YA}{\ell}\right)x.dx$$

Therefore total work done to stretch the wire from its original length ℓ to $(\ell + x)$ will be

$$w = \int_0^x \left(\frac{YA}{\ell}\right)x\,dx = \frac{YA}{\ell}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{YA}{\ell}\right)x^2$$

or $$w = \frac{1}{2}(A\ell)\left(\frac{Yx}{\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

$$w = \frac{1}{2}\text{volume} \times \text{stess} \times \text{strain}$$

Thus strain energy per unit volume will be

$$= \frac{1}{2}\text{Stress} \times \text{Strain}$$

Ques 22 :A Cantilever of 50 cm. length is depressed at its loaded end by 4mm. Calcualte the depression at a distance of 30 cm. from the fixed end. **(2009)**

Soln. The depression of the cantilever at a distance x from its fixed end is given by

$$y = \frac{W}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{Wx^2}{2YI}\left(l - \frac{x}{3}\right) \quad \text{.....................(1)}$$

and the depression at free end ($x = l$) is

$$\delta = \frac{Wl^3}{3YI} \quad \text{.....................(2)}$$

Where l is the length of the cantilever, W is the load and Y is the Young's modulus of the material I is the geometrical moment of inertia. From equation (1) and (2), we may write

$$\frac{y}{\delta} = \frac{\frac{x^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{l^3}{3}\right)} \quad \text{or} \quad y = \left[\frac{3x^2\left(l - \frac{x}{3}\right)}{2l^3}\right]\delta$$

Given $l = 0.5$ m, $\alpha = 0.3$ m and $\delta = 4 \times 10^{-3} m$,

therefore

$$y = \frac{3 \times (0.3)^2 \times \left(0.5 - \frac{0.3}{3}\right)}{2 \times (0.5)^3} \times 4 \times 10^{-3}$$

$$y = \frac{0.27 \times 0.4}{0.25} \times 4 \times 10^{-3}$$

$$y = \frac{27 \times 1.6}{25} \times 10^{-3}$$

$$y = 1.728 \times 10^{-3} \text{ meter}$$

$y = 1.728$ m.m. **Ans.**

Q23. What is Elastic limit? **(2010)**

Sol^n. In the case of a solid, if the stress be gradually increased, the strain too increases with it in accordance with Hook's law untill a point is reached at which the linear relationship between the two just ceases and beyond which the strain increases much more rapidly than is warranted by the law. This value of the stress for which Hook's law just ceases to be obeyed is called the elastic limit of the material of the body far the type of stress in question.

The body thus recovers its original state on removal of the stress within this limit but fails to do so when this limit is exceeded acquiring a permanent residual strain or a permanent set, as it is usually referred to.

किसी भी ठोस में यदि हम प्रतिबल को लगातार बढ़ाते है तो हुक्स के नियमानुसार विकृति भी तब तक बढ़ती है जब तक कि इनके बीच का सीधा सम्बन्ध खत्म न हो। इस सीमा से पहले प्रतिबल के बढ़ने पर विकृति तेजी से बढ़ती है। प्रतिबल का वह मान जब हुक्स नियम पालन कर रहा हो उस पदार्थ की प्रत्यास्थता सीमा कहलाती है। प्रत्यास्था सीमा के अन्दर पिण्ड प्रतिबल के हटाने के बाद अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त कर लेता है। जबकि प्रत्यास्थ सीमा के बाहर आने पर पिण्ड अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त नही कर पाती है।

The elastic limit is also sometimes defined in term of the load or the force which produces the maximum reversible or recoverable deformation in the body.

प्रत्यास्था सीमा को हम कभी-कभी भार या बल के रूप में भी परिभाषित करते है। इसके अनुसार प्रत्यास्थ सीमा वह अधिकतम बल होती है जो पिण्ड में अधिकतम उत्क्रमणीय तथा पुनः प्राप्त होने वाली विरूपकता उत्पन्न कर सके।

Q24. Differentiate between longitudinal and lateral strains. (GKP-2016)

Sol^n: Longitudinal Strain (α) :- The ratio of change in dimension to the initial dimension, parallel to the direction of force is called longitudinal strain. If 'l' is the original length and 'δl' is the increase in length then longitudinal strain.

विमा के बदलाव का प्रारम्भिक विमा से अनुपात जो बल की दिशा में होना है अनुद्धैय विकृति कहलाता है। यदि 'l' प्रारम्भिक लम्बाई तथा 'δl' लम्बाई में वृद्धि है तो अनुद्धैर्य विकृति-

$$\alpha = \frac{\delta l}{l}$$

Lateral Strain(β): The ratio of change in dimension to the initial dimension, perpendicular to the direction of force is called lateral strain of 'd' is the original diameter and 'δd' is the change in diameter then lateral strain-

विमा में बदलाव का प्रारम्भिक विमा से अनुपात जो बल की दिशा के लम्बवत में होता है पाश्र्व विकृति कहलाता है। यदि 'd' वास्तविक व्यास तथा 'δd' व्यास में परिवर्तन हो तो पाश्र्व विकृति-

$$\beta = \frac{\delta d}{d}$$

•••••